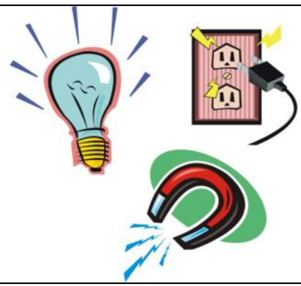
KATEDRA FIZYKI

WYDZIAŁ INŻYNIERII PRODUKCJI I TECHNOLOGII MATERIAŁÓW POLITECHNIKA CZĘSTOCHOWSKA

PRACOWNIA ELEKTRYCZNOŚCI I MAGNETYZMU



ĆWICZENIE NR E-5

POMIAR POJEMNOŚCI KONDENSATORA METODĄ ROZŁADOWANIA

I. Zagadnienia do przestudiowania

1. Pojemność elektryczna (definicja, jednostki).
2. Łączenie kondensatorów - szeregowe i równoległe.
3. Kondensator w obwodzie prądu stałego, ładowanie i rozładowanie kondensatora.
4. Zależność natężenia prądu oraz napięcia od czasu.

II. Wprowadzenie teoretyczne

Pojemnością elektryczną C nazywamy stosunek ładunku elektrycznego Q zgromadzonego na powierzchni przewodnika do napięcia U wytwarzanego przez ten ładunek zgodnie ze wzorem

$$C = \frac{Q}{U} \tag{1}$$

Podstawową jednostką pojemności elektrycznej jest farad (F), którą można w oparciu o wzór (1) zdefiniować następująco: kondensator ma pojemność jednego farada, gdy zgromadzony na jego okładkach ładunek jednego kulomba powoduje powstanie różnicy potencjałów jednego wolta. Farad jest bardzo dużą jednostką pojemności, dlatego w codziennej praktyce stosuje się mniejsze jednostki pojemności, takie jak: milifarad - mF, mikrofarad - μF, nanofarad - nF i pikofarad - pF. Kondensatory w obwodach elektrycznych służą do gromadzenia ładunków elektrycznych. Kondensatory można łączyć szeregowo, równolegle i mieszanie. Jeżeli kondensatory C_1 i C_2 łączymy szeregowo, to ich pojemność zastępczą C liczymy zgodnie ze wzorem

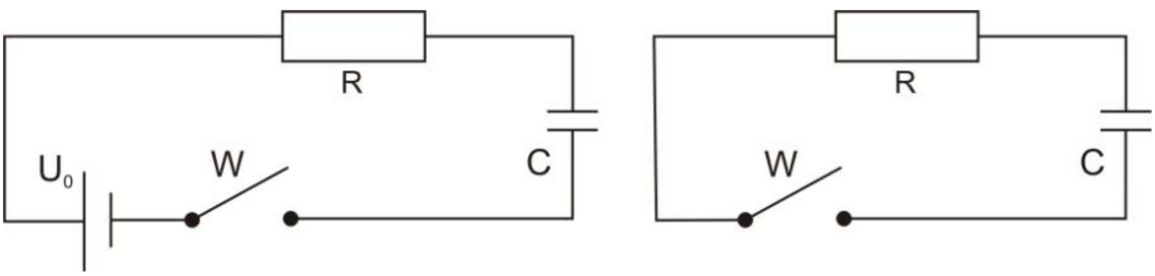
$$\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C} \tag{2}$$

Natomiast łącząc kondensatory równolegle, ich pojemność zastępczą liczymy zgodnie ze wzorem

$$C_1 + C_2 = C \tag{3}$$

Ładowanie kondensatora

Przeanalizujemy, jak zmienia się wartość natężenia prądu w obwodzie przedstawionym na rysunku1a podczas ładowania kondensatora o pojemności C.



Rys. 1a **Rys. 1b**

Obwód przedstawiony na rysunku 1a składa się z kondensatora o pojemności C, oporu R, źródła prądu stałego o napięciu biegunowym U_0 i wyłącznika W. Po zamknięciu obwodu wyłącznikiem W w dowolnej chwili ładowania kondensatora napięcie na okładkach kondensatora $U_C = Q/C$, gdzie Q jest ładunkiem zgromadzonym w kondensatorze oraz na oporze R pojawia się spadek napięcia $U_R = IR$. W dowolnej chwili t spełnione jest II prawo Kirchhoffa dla tego obwodu w postaci

$$RI + \frac{Q}{C} = U_0 \tag{4}$$

Licząc pochodną równania (4) po czasie i uwzględniając fakt, że $I = \frac{dQ}{dt}$, otrzymujemy

$$R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0 \tag{5}$$

Równanie (5) przedstawiające prąd ładowania kondensatora oraz równanie (9) przedstawiające prąd rozładowania kondensatora są identyczne. Pełne rozwiązanie równania (9) jest podane w następnym rozdziale. Rozwiązanie równania ma więc postać

$$I = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \tag{6}$$

Z równania (6) wynika, że podczas ładowania kondensatora natężenie prądu w chwili zamknięcia obwodu $t = 0$ wyłącznikiem W ma wartość maksymalną $I = I_0$, ale na- pięcie na okładkach kondensatora $U_C = 0$. Ale po niedługim czasie natężenie prądu maleje do zera, a napięcie na okładkach kondensatora osiąga wartość maksymalną $U_C = U_0$ i w tym momencie kończy się proces ładowania kondensatora.

Rozładowanie kondensatora

Dokonamy analizy, jak zmienia się natężenie prądu w obwodzie przedstawionym na rysunku 1b podczas rozładowania tego samego kondensatora o pojemności C.

Obwód przedstawiony na rysunku lb zawiera kondensator o pojemności C, naładowany do napięcia $U_C = U_0$, rezystancję R i wyłącznik W. Po zamknięciu obwodu wyłącznikiem w obwodzie popłynie prąd rozładowania I, którego wartość maleje w czasie t. II prawo Kirchhoffa w tym przypadku ma postać

$$U_R + U_C = 0 \tag{7}$$

gdzie: $U_R = IR$ - spadek napięcia na oporze R, U_C - chwilowa wartość napięcia na kondensatorze.

Uwzględniając fakt, że $U_C = \frac{Q}{C}$, gdzie Q jest chwilową wartością ładunku zgromadzonego na kondensatorze, możemy równanie (7) zapisać w postaci

$$RI + \frac{Q}{C} = 0 \tag{8}$$

Licząc pochodną równania (8) po czasie i uwzględniając fakt, że $I = \frac{dQ}{dt}$, otrzymujemy

$$R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0 \tag{9}$$

Równanie (9) jest równaniem różniczkowym rzędu pierwszego o rozdzielonych zmiennych. Dokonując rozdzielenia zmiennych, otrzymujemy

$$\frac{dI}{I} = -\frac{dt}{RC} \tag{10}$$

Całkując obustronnie równanie (10), mamy

$$\int \frac{dI}{I} = -\frac{1}{RC}\int dt$$

po scałkowaniu mamy

$$\ln I = -\frac{t}{RC} + \ln A \tag{11}$$

ln oznacza logarytm naturalny, inaczej logarytm przy podstawie e = 2,71, A - stałą całkowania, której wartość obliczamy, korzystając z faktu, że dla czasu t = 0, a więc w chwili zamykania obwodu (rys. 1b) natężenie prądu $I = I_0$. Podstawiając te wartości do równania (11), otrzymujemy $\ln A = \ln I_0$. Możemy równanie (11) zapisać w postaci

$$\ln I = -\frac{t}{RC} + \ln I_0 \tag{11a}$$

Przenosząc $\ln I_0$ na lewą stronę, otrzymujemy

$$\ln I - \ln I_0 = -\frac{t}{RC}$$

lub inaczej

$$\ln\frac{I}{I_0} = \ln e^{-\frac{t}{RC}}$$

Opuszczając logarytmy, otrzymujemy ostateczny wzór opisujący zmianę natężenia prądu w zależności od czasu t w obwodzie przedstawionym na rysunku lb

$$I = I_0 e^{-\frac{t}{RC}} \tag{12}$$

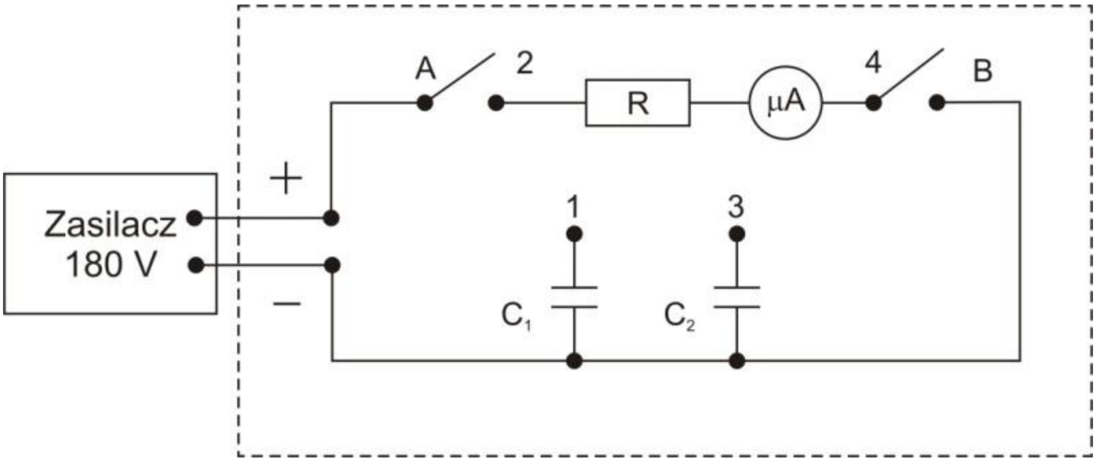
Z równania (12) wynika, że wartość natężenia prądu I zależy od czasu t. Dla t = 0, $I = I_0$. Gdy czas rozładowania rośnie, natężenie prądu maleje, dążąc do wartości zerowej. Iloczyn $RC = \tau$ nazywamy stałą czasową obwodu. Po upływie czasu rozładowania $t_0 = \tau$, natężenie prądu $I = I_0/e$. Czas ten nazywany jest czasem relaksacji.

W tym ćwiczeniu po połączeniu obwodu zgodnie z podanym schematem najpierw ładujemy kondensator przez opór R i opór na wyjściu zasilacza połączonych równolegle. W chwili rozpoczęcia ładowania kondensatora napięcie na jego okładkach wynosi zero, więc przez opór R i mikroamperomierz nie płynie prąd. Dalsze ładowanie kondensatora powoduje wzrost napięcia na jego okładkach i przez opór R oraz mikroamperomierz płynie prąd o rosnącym natężeniu. Po pewnym czasie napięcie na okładkach kondensatora osiąga maksymalną wartość U_0 równą wartości napięcia na zaciskach zasilacza. Kondensator jest w pełni naładowany i natężenie prądu wskazywane przez mikroamperomierz osiąga wartość maksymalną I_0 .

III. Zestaw pomiarowy

Zasilacz prądu stałego oraz: dwa kondensatory, opornik, mikroamperomierz (umieszczone w obudowie), stoper.

IV. Schemat układu pomiarowego



V. Przebieg ćwiczenia

Pomiar pojemności kondensatora C1

1. Połączyć gniazdo zaciskowe (1) z gniazdem zaciskowym (2).
2. Wyłącznik A i B przełączyć w pozycję Z. Włączyć zasilacz, nastawić napięcie na wyjściu zasilacza U_0 = 180 V, po krótkim czasie ustali się maksymalny prąd I_0 .
3. Przełączamy wyłącznik A w pozycję 0, odpowiada to chwili t = 0 i natężeniu prądu $I = I_0$.

4. Jednocześnie włączamy stoper i co 40 sekund odczytujemy wartości prądu *I*, a wyniki pomiarów wpisujemy do tabeli 1. Pomiary kończymy w momencie, gdy wartość prądu $I = 25\ \mu A$.
5. Rozładować kondensator C_1. W tym celu należy wyłączyć zasilacz i połączyć gniazdo zaciskowe (1) z gniazdem (4). Następnie przełącznik B ustawić w pozycję 0.

Pomiar pojemności kondensatora C2

1. Połączyć gniazdo zaciskowe (3) z gniazdem zaciskowym (2) i powtórzyć czynności opisane w punktach od 3 do 5 dla kondensatora C_1. Pomiary zakończyć w momencie, gdy $I = 25\ \mu A$, a wyniki wpisać do tabeli 2.
2. Rozładować kondensator C_2. W tym celu należy wyłączyć zasilacz i połączyć gniazdo zaciskowe (3) z gniazdem zaciskowym (4). Potem przełącznik B ustawić w pozycję 0.

VI. Tabele pomiarowe

Tabela 1

t [s]	0	40	80	…				
I [μA]								25

Tabela 2

t [s]	0	40	80	…				
I [μA]								25

VII. Opracowanie wyników

Proponowane są dwie metody opracowania i analizy wyników:

Metoda pierwsza

1. Na podstawie wyników pomiarów sporządzić na papierze milimetrowym (format A4) wykresy zależności $I = f(t)$ dla obu kondensatorów.
2. Na wykresach tych zaznaczyć wartość natężenia prądu $I = I_0/e$ (*e* - podstawa logarytmu naturalnego) i odczytać odpowiadający temu prądowi czas relaksacji t_0.
3. Uwzględniając, że $t_0 = RC$ oraz $R = \frac{U}{I_0}$, obliczyć pojemności kondensatorów ze wzoru

$$C = \frac{t_0 I_0}{U}$$

4. Błąd bezwzględny $|\Delta C|$ obliczamy metodą różniczki zupełnej

$$|\Delta C| = \left|\frac{I_0}{U}\right| |\Delta t_0| + \left|\frac{t_0}{U}\right| |\Delta I_0| + \left|I_0 \frac{t_0}{U^2}\right| |\Delta U|$$

Metoda druga

1. Zauważmy, że jeśli w równaniu (11a) $a = -\frac{1}{RC}$, $b = \ln I_0$ oraz $y = \ln I$ i $x = t$, wówczas otrzymujemy równanie prostej

$$y = ax + b$$

2. Wartości współczynników a i b oraz ich odchylenia standardowe σ_a i σ_b obliczamy metodą najmniejszych kwadratów za pomocą znajdującego się w pracowni komputera wyposażonego w program „REGRESJA”.
3. Znając wartość współczynników a i b, obliczamy, $I_0 = e^b$ oraz $R = \frac{U}{I_0}$. Wówczas możemy obliczyć pojemności kondensatorów

$$C = -\frac{1}{aR}$$

4. Obliczamy błąd bezwzględny pojemności kondensatora metodą różniczki zupełnej

$$|\Delta C| = \left|\frac{I_0}{aU}\right| \left(\left|\frac{\Delta a}{a}\right| + \left|\frac{\Delta I_0}{I_0}\right| + \left|\frac{\Delta U}{U}\right| \right)$$

gdzie: $|\Delta a| \approx \sigma_a$, $|\Delta I_0| \approx I_0 \sigma_b$, $|\Delta U|$ - niepewność pomiarowa napięcia zasilania.

5. Porównać wartości pojemności C otrzymane w obu zastosowanych metodach.

Literatura

1. Lech J., Opracowanie wyników pomiarów w laboratorium podstaw fizyki, Wydawnictwo Wydział Inżynierii Procesowej, Materiałowej i Fizyki Stosowanej PCz, Częstochowa 2005.
2. Massalski J., Massalska M., Fizyka dla inżynierów - Fizyka klasyczna, Tom I, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 2005.
3. Piekara A., Elektryczność i magnetyzm, PWN, Warszawa 1970.
4. Zawadzki A., Hofmokl H., Laboratorium fizyczne, PWN, Warszawa 1968.

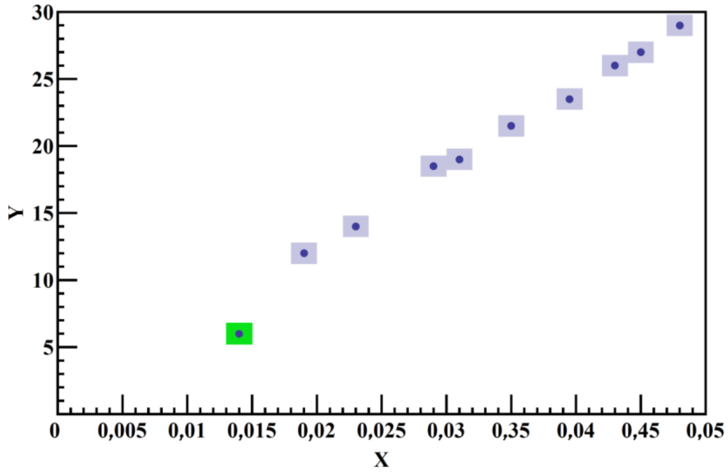
VIII. Graficzne szacowanie wartości współczynników a i b prostej oraz ich niepewności

A. Dopasowanie prostej do wyników pomiarów.

Jeżeli badana zależność jest liniowa lub otrzymany wykres sugeruje taką zależność, to jej przebieg powinien mieć zapis: $y = a\,x + b$.
W jaki sposób uzyskać wartości parametrów *a* i *b* prostej jak najlepiej dopasowanej do zbioru *n* punktów doświadczalnych $(x_1\, y_1)$, $(x_2\, y_2)$, ... $(x_n\, y_n)$?

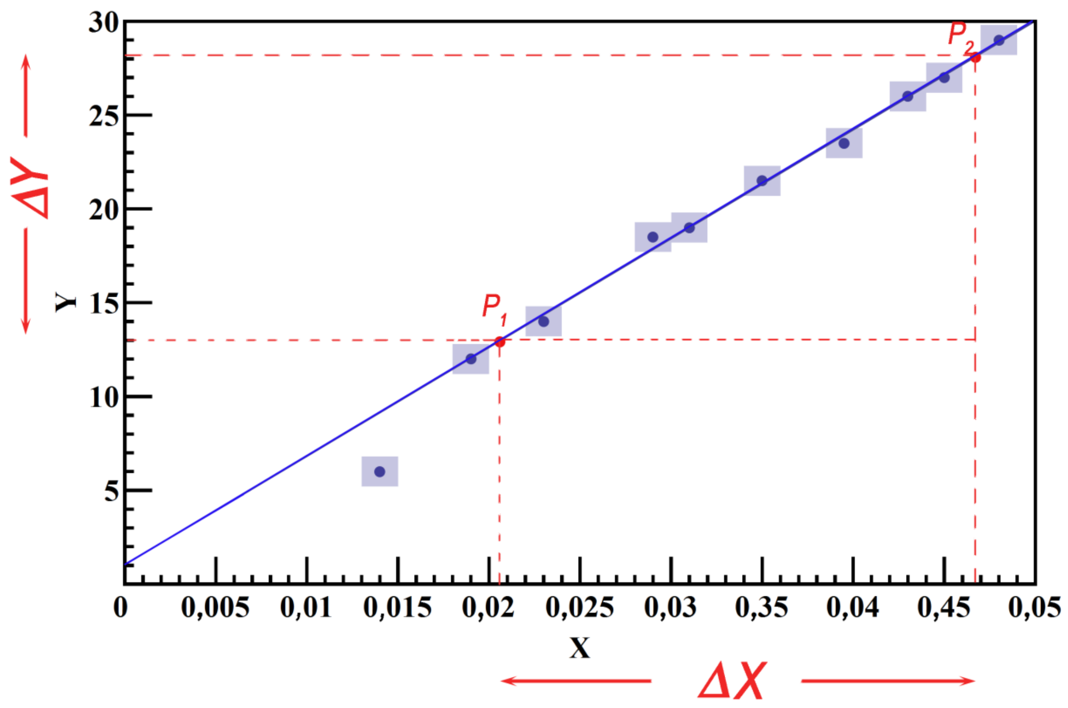
1. Na wykresie nanosimy wszystkie punkty pomiarowe oraz ich niepewności (Rys.3).

Jeżeli któryś z punktów pomiarowych znacznie odbiega od przebiegu linii, wzdłuż której układają się pozostałe punkty, to w dalszej analizie należy go odrzucić jako błąd gruby. Na rys.3 jest to prostokąt oznaczony kolorem zielonym.



Rys.3

2. Jeżeli punkty układają się wzdłuż linii prostej, to linię tak prowadzimy, aby przechodziła przynajmniej przez 70%prostokątów i suma odległości współrzędnych punktów pomiarowych od tej linii była po obu stronach mniej więcej taka sama (rys.4).
   Określamy **szeroki** przedział wartości argumentu ΔX i odpowiadający temu przyrost wartości zmiennej zależnej (wartości funkcji) ΔY - wybieramy dwa punkty P_1 i P_2 (zaznaczone na rys.4 kolorem czerwonym) i odczytujemy odpowiednie wartości ich współrzędnych $(x_1\,, y_1)$ oraz (x_2, y_2).
   Obliczamy różnice $\Delta X = x_2 - x_1$ i $\Delta Y = y_2 - y_1$.



Rys.4

3. Współczynnik nachylenia *a* jest stosunkiem przyprostokątnych ΔY i ΔX trójkąta, którego przeciwprostokątna jest częścią poprowadzonej graficznie prostej (rys. 4).

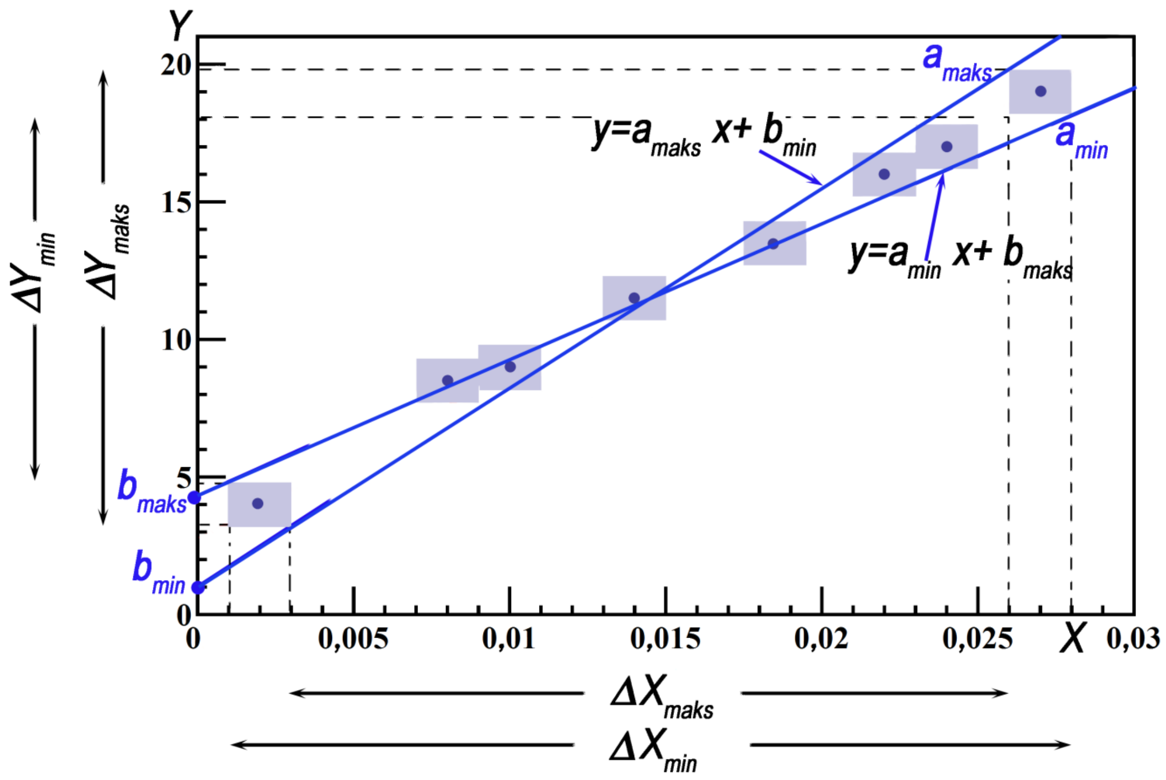
Współczynnik kierunkowy tak narysowanej prostej jest równy:

$$a = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \qquad (1)$$

Współczynnik b jest miejscem przecięcia prostej z osią Y.

UWAGA:
W wykresach wielkości fizycznych nie można utożsamiać współczynnika nachylenia z tangensem kąta nachylenia prostej do osi X .W wykresach wielkości fizycznych kąt nachylenia prostej może być różny dla tych samych danych pomiarowych w zależności od tego, jakie podziałki zastosujemy na osiach wykresu. Jednoznacznie określoną wielkością pozostaje współczynnik nachylenia *a* określony wzorem (1) .
W przeciwieństwie do bezwymiarowego tangensa, nachylenie *a* posiada wymiar, będący stosunkiem wymiarów wielkości Y i X.

Wadą metody graficznej wydawać się może subiektywność (każdy poprowadzi prostą trochę inaczej) jak i brak informacji o niepewności Δa i Δb parametrów prostej.
Poniżej przedstawiona jest metoda wyznaczania wartości parametrów a i b oraz ich niepewności dla prostej najlepiej dopasowującej dane pomiarowe.
Wybieramy dwa końcowe punkty pomiarowe i prowadzimy dwie proste o największym (a_{maks}) i najmniejszym (a_{min}) kącie nachylenia. Proste te powinny przechodzić przez przeciwległe wierzchołki skrajnych prostokątów niepewności, tak jak pokazano poniżej na rys. 5. Na osi Y proste wyznaczają dwa punkty przecięcia, wyznaczające b_{min} i b_{maks} .



Rys. 5

Wówczas,

$$a_{min} = \frac{\Delta Y_{min}}{\Delta X_{min}} \quad \text{i} \quad a_{maks} = \frac{\Delta Y_{maks}}{\Delta X_{maks}}$$

$$|\Delta a| = \frac{1}{2}|a_{maks} - a_{min}|$$

$$a_{sr} = \frac{1}{2}(a_{maks} + a_{min})$$

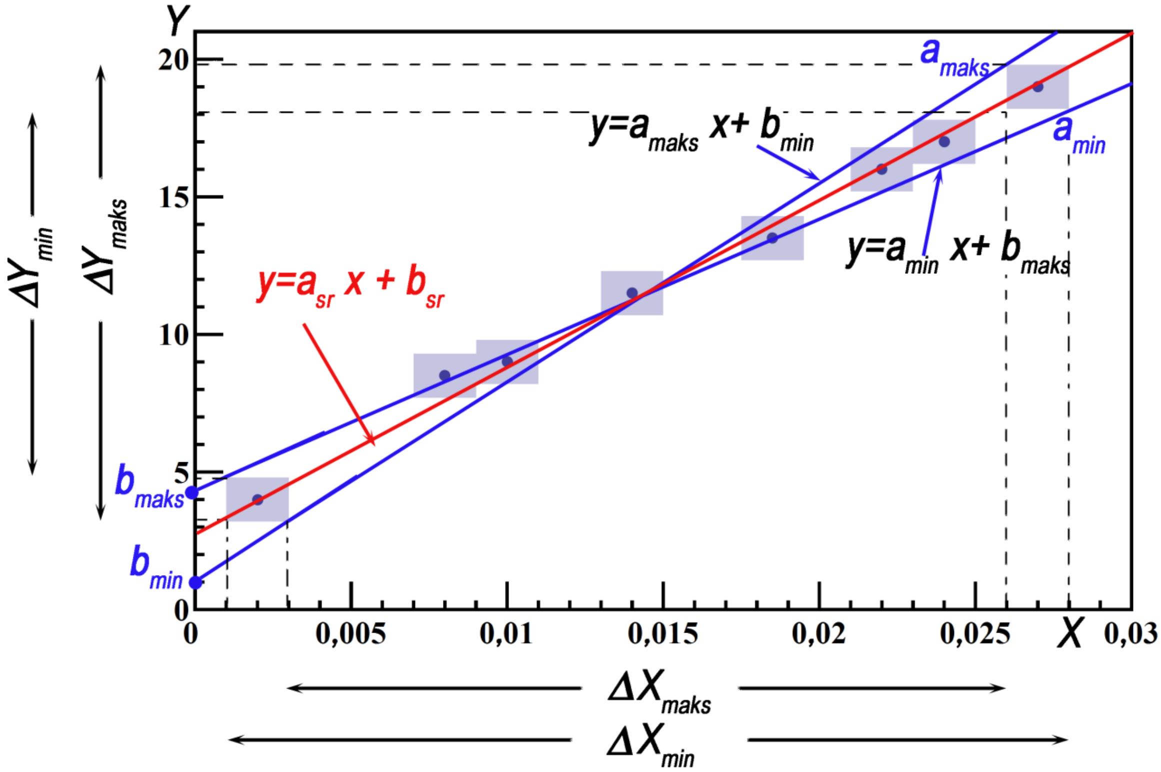
oraz

$$|\Delta b| = \frac{1}{2}|b_{maks} - b_{min}|$$

$$b_{sr} = \frac{1}{2}(b_{maks} + b_{min})$$

Ostatecznie, na rys.6 poprowadzono prostą najlepszego dopasowania

$y = a_{sr}\,x + b_{sr}$, otrzymaną metodą graficzną (zaznaczona kolorem czerwonym).



Y
20
15
10
5
0
0
0,005
0,01
0,015
0,02
0,025
X
0,03
ΔY_min
ΔY_maks
ΔX_maks
ΔX_min
a_maks
a_min
b_maks
b_min
y=a_maks x+ b_min
y=a_min x+ b_maks
y=a_sr x + b_sr

Rys.6