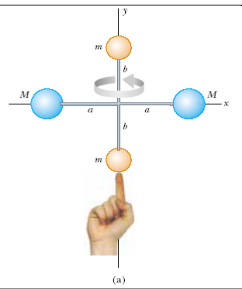
KATEDRA FIZYKI

WYDZIAŁ INŻYNIERII PRODUKCJI
I TECHNOLOGII MATERIAŁÓW
POLITECHNIKA CZĘSTOCHOWSKA

PRACOWNIA MECHANIKI



Ć W I C Z E N I E N R M-2

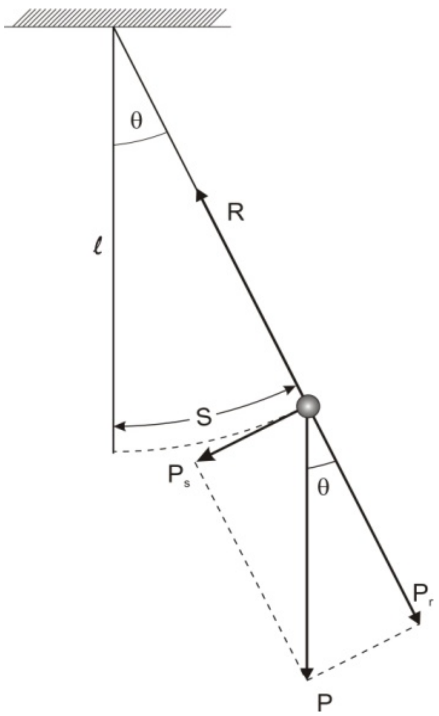
ZALEŻNOŚĆ OKRESU DRGAŃ WAHADŁA OD AMPLITUDY

I. Zagadnienia do przestudiowania

1. Ruch harmoniczny prosty.
2. Ruch harmoniczny tłumiony.
3. Wahadło matematyczne.
4. Zależność okresu drgań wahadła matematycznego amplitudy.

II. Wprowadzenie teoretyczne

Ruchem harmonicznym nazywamy ruch, w którym wychylenie drgającego punktu materialnego jest sinusoidalną (lub cosinusoidalną) funkcją czasu. W ruchu takim siła działająca na punkt materialny jest wprost proporcjonalna do wychylenia i zawsze skierowana do położenia równowagi (tzw. siła zwrotna). Przykładem ruchu harmonicznego prostego są drgania wahadła matematycznego. Wahadło matematyczne jest to wyidealizowane ciało o masie punktowej zawieszone na cienkiej, nierozciągliwej nici. Kiedy ciało wytrącimy z położenia równowagi, zaczyna się ono wahać w płaszczyźnie pionowej pod wpływem siły ciężkości.



Rys. 1. Rozkład sił działających na wahadło matematyczne

Na rysunku 1 przedstawiono wahadło o długości l i masie m odchylone od pionu o kąt θ. Na rozpatrywany punkt materialny działają następujące siły: pionowa siła ciężkości $\boldsymbol{P} = mg$ oraz siła reakcji nici $\boldsymbol{R}$. Siłę ciężkości $\boldsymbol{P}$ rozkładamy na dwie składowe:

– składową radialną $\boldsymbol{P_r}$, o wartości $P_r = mg\cos\theta$,

– składową styczną $\boldsymbol{P_s}$, o wartości $P_s = -mg\sin\theta$.

Składowa styczna jest siłą przywracającą równowagę układu - sprowadza masę m do położenia równowagi. Należy podkreślić, że wartość siły P_s nie jest proporcjonalna do przemieszczenia kątowego θ, lecz do $\sin\theta$. Zatem ruch ten nie jest prostym ruchem harmonicznym

$$P_s = -mg\sin\theta \tag{1}$$

Korzystając z II zasady dynamiki Newtona, ruch masy możemy opisać równaniami:

$$ma = -mg\sin\theta \tag{2}$$

Podstawiając:

$$a = \frac{d^2 s}{dt^2} = l\frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad s = l\theta$$

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta$$

otrzymujemy równanie różniczkowe ruchu dla wahadła w postaci

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \tag{3}$$

Załóżmy, że wahadło wykonuje małe ruchy wokół położenia równowagi. W tym przypadku - dla małych kątów wychylenia można przyjąć w przybliżeniu, że $\sin\theta \approx \theta$. Tak więc ścisłe równania różniczkowe (3) zastępujemy równaniem przybliżonym

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0 \tag{4}$$

W tym przybliżeniu siła zwrotna wynosi $P_s = -mg\theta$, co jest właśnie wymaganym kryterium dla prostego ruchu harmonicznego. Rozwiązanie tego równania ma postać

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \alpha) \tag{5}$$

gdzie: α - faza początkowa ruchu, θ_0 - amplituda drgań (największe wychylenie kulki od położenia równowagi) i ω - prędkość kątowa. Z powyższego wynika, że ruch wahadła dla małych kątów wychylenia ma charakter drgań harmonicznych.

Prędkość kątowa jest określona wzorem $\omega = 2\pi / T$, gdzie T jest okresem drgań, czyli czasem, w ciągu którego zachodzi pełne jedno drganie.

Ponieważ w równaniu (4) $\omega^2 = g/l$, a więc

$$\frac{g}{l} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

Okres drgań dany jest wzorem

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Okres tych drgań nie zależy od amplitudy, a więc są to drgania izochroniczne.

Dla dużych kątów wychylenia przybliżenie $\sin\theta \approx \theta$ nie jest słuszne, a równanie (3) opisujące drgania wahadła jest nieliniowe. Rozwiązaniem jego jest zależność opisująca ruch okresowy, lecz już ruch nieharmoniczny. Okres tego ruchu zależy od amplitudy. Zależność tę można przedstawić w postaci szeregu

$$T_\theta = T_0[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\theta}{2} + \left(\frac{3}{8}\right)^2 \sin^4\frac{\theta}{2} + \left(\frac{15}{48}\right)^2 \sin^6\frac{\theta}{2} + ...] \tag{6}$$

Przez rozwinięcie funkcji sinus w szereg potęgowy wzór ten można przekształcić do postaci wygodniejszej do obliczeń

$$T_\theta = T_0[1 + \frac{1}{16}\theta^2 + \frac{11}{3072}\theta^4 + ...] \tag{7}$$

W ćwiczeniu sprawdza się doświadczalnie zależność (7).

W podanym opisie drgań nie uwzględniono zjawiska tłumienia. Drgania harmoniczne proste stanowią przypadek drgań idealnych. W warunkach rzeczywistych, w dowolnym ośrodku materialnym drgania są zawsze związane z przekazywaniem energii otoczeniu - przy pokonywaniu sił oporu. Strata energii przez ciało drgające powoduje tłumienie, w wyniku czego zmniejsza się amplituda drgań. Prędkość kątowa drgań tłumionych ω jest nieco mniejsza od prędkości kątowej drgań nietłumionych ω_0 i wynosi

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \tag{8}$$

gdzie β jest współczynnikiem tłumienia.

Wartość współczynnika tłumienia β można obliczyć z szybkości zaniku amplitudy jako

$$\beta = \frac{\ln\frac{\theta_1}{\theta_2}}{t_2 - t_1} \tag{9}$$

gdzie θ_1 i θ_2 są amplitudami drgań, zmierzonymi w chwilach t_1 i t_2.

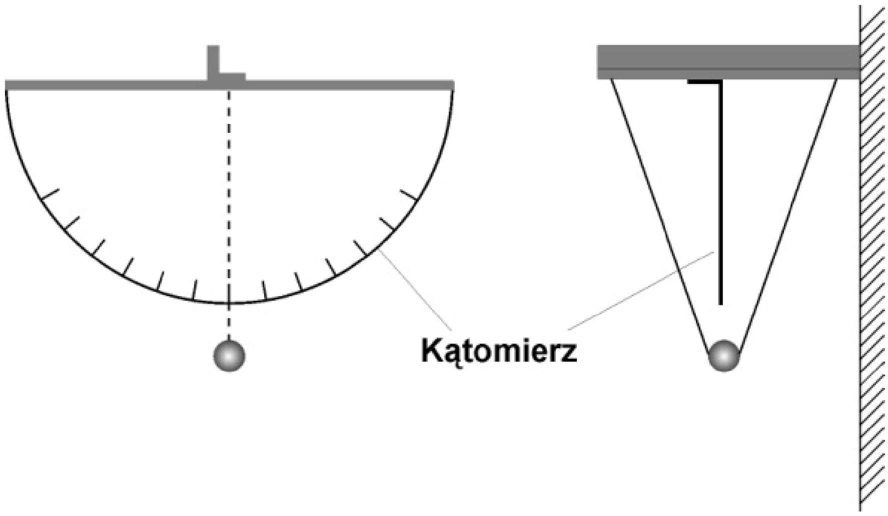
III. Zasada pomiaru

Celem doświadczenia jest wyznaczenie zależności okresu drgań od amplitudy dla układu zbliżonego do wahadła matematycznego oraz porównanie jej z zależnością teoretyczną.

W ćwiczeniu wykorzystujemy wahadło podobne do wahadła matematycznego. Kulka zawieszona jest na dwóch niciach, co ułatwia wprawienie wahadła w ruch drgający w jednej płaszczyźnie (rys. 2). W płaszczyźnie drgań umieszczony jest kątomierz, na którym odczytuje się kąt wychylenia - amplitudę drgań. Okres drgań mierzy się stoperem.

IV. Zestaw pomiarowy

Wahadło podobne do wahadła matematycznego, kątomierz, elektroniczny miernik czasowy, linijka.



Rys. 2. Widok ogólny wahadła

V. Przebieg ćwiczenia

1. Wprawić w ruch wahadło w ten sposób, aby drgania odbywały się w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny kątomierza.
2. Odczytać amplitudę początkową θ_1 na kątomierzu, jednocześnie włączyć licznik $t_1 = 0$. Aby uniknąć błędu paralaksy, odczyt kąta wykonać dla pozycji oka, w której obie linki pokrywają się.
3. Zmierzyć czas trwania 50 okresów. W chwili zatrzymania licznika odczytać czas t_2 i jednocześnie amplitudę końcową θ_2. Pomiar powtórzyć trzykrotnie. Obliczyć średnią wartość okresu. Wyniki wpisać do tabeli 1.
4. Pomiary okresu drgań (czynności z pkt. 1-3) przeprowadzić dla wartości amplitudy początkowej θ_1 równych: 10°, 20°, 30°, ... , 60°.
5. Wyznaczyć okres wahadła T_{0d} przy najmniejszej amplitudzie drgań, która nie powinna przekraczać 3°. Zwiększenie dokładności uzyskujemy przez pięciokrotne powtórzenie pomiaru czasu 50 drgań. Obliczyć średnią wartość okresu T_0. Wyniki pomiarów wpisać do tabeli 2.
6. Zmierzyć długość wahadła l.

VI. Tabele pomiarowe

TABELA 1. **Wyznaczenie okresu wahadła T_d od amplitudy θ**

θ_1 [deg] [rad]	θ_2 [deg]	$\theta_{2śr}$ [deg] [rad]	$\bar{\theta} = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_{2sr})$ [rad]	t [s]	T = t/n [s]	$T_{śr}$ [s]	$\left(\frac{\Delta T}{T_0}\right)_d$	$\left(\frac{\Delta T}{T_0}\right)_t$
10° ……		……. …….						
20° …...		……. …….						
30° …….		……. …….						
40° …….		……. …….						
50° …….		……. …….						
60° …….		……. …….						

TABELA 2. **Wyznaczenie okresu wahadła T_{0d}**

θ_1 [deg]	t [s]	T_{0d} [s]	$T_{0d\ śr}$ [s]
< 3°			

Długość wahadła l = ... m.

VII. Opracowanie wyników

1. Wykorzystując zmierzoną długość wahadła, obliczyć teoretyczny okres drgań wahadła ze wzoru

$$T_{0t} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

   i porównać z wartością zmierzoną dla małych kątów.

2. Korzystając ze wzoru

$$T_t = T_{0t}\left[1 + \frac{1}{16}\left(\overline{\theta}\right)^2 + \frac{11}{3072}\left(\overline{\theta}\right)^4 + \ldots\right]$$

   obliczyć względną zmianę okresu wahadła wynikającą z teorii:

$$\left(\frac{\Delta T}{T_{0t}}\right)_t = \frac{T - T_{0t}}{T_{0t}} = \frac{T_{0t} + T_{0t}\frac{1}{16}\left(\overline{\theta}\right)^2 + T_{0t}\frac{11}{3072}\left(\overline{\theta}\right)^4 - T_{0t}}{T_{0t}} = \frac{T_{0t}\left(\frac{1}{16}\left(\overline{\theta}\right)^2 + \frac{11}{3072}\left(\overline{\theta}\right)^4\right)}{T_{0t}}$$

$$\left(\frac{\Delta T}{T_{0t}}\right)_t = \frac{1}{16}\left(\overline{\theta}\right)^2 + \frac{11}{3072}\left(\overline{\theta}\right)^4$$

   oraz wyznaczoną doświadczalnie

$$\left(\frac{\Delta T}{T_{0d}}\right)_d = \frac{T_d - T_{0d}}{T_{0d}}$$

3. Narysować wykresy:
   a. Teoretycznej zależności względnej zmiany okresu wahadła od średniej amplitudy drgań $\overline{\theta}$

$$\left(\frac{\Delta T}{T_0}\right)_t = f\left(\overline{\theta}\right)$$

   b. Doświadczalnej zależności względnej zmiany okresu wahadła od średniej amplitudy drgań $\overline{\theta}$

$$\left(\frac{\Delta T}{T_0}\right)_d = f\left(\overline{\theta}\right)$$

   Średnia amplituda drgań wynosi $\overline{\theta} = \frac{1}{2}\left(\theta_1 + \theta_{2sr}\right)$. $\overline{\theta}$ wyrazić w radianach (1° = 0,0174 rad).

4. Dla amplitudy θ_1 = 60° obliczyć współczynnik tłumienia β, a następnie okres drgań tłumionych, korzystając ze wzorów:

$$\beta = \frac{\ln\frac{\theta_1}{\theta_2}}{t_2 - t_1}; \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

5. Czy zjawisko tłumienia ma w naszym doświadczeniu zauważalny wpływ na okres drgań?

VIII. Rachunek błędu

Błąd pomiaru okresu T i amplitudy $\overline{\theta}$ oszacować z dokładności wyznaczenia okresu T i amplitudy θ. Błędy pomiarowe nanieść na wykres doświadczalnej zależności okresu drgań od średniej amplitudy.

Literatura

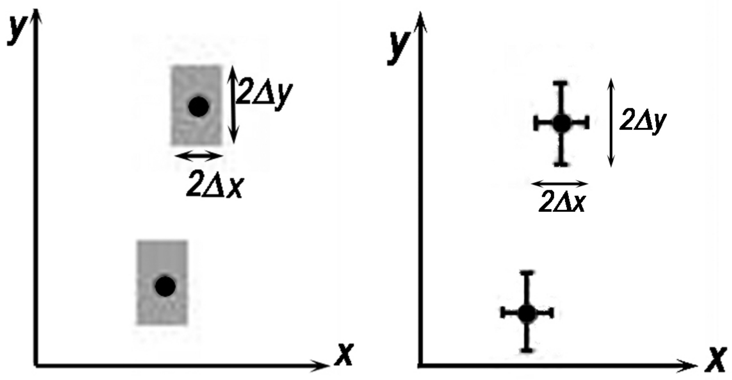
1. Halliday D., Resnick R., Walker J., Fizyka, t. 2, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2005.
2. Kittel C., Knight M.A., Ruderman W.D., Mechanika, PWN, Warszawa 1975.
3. Konopka M., Zięba A. i inni, Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki, cz. I, Wydawnictwo AGH, Kraków 1986.
4. Lech J., Opracowanie wyników pomiarów w laboratorium podstaw fizyki, Wydawnictwo Wydziału Inżynierii Procesowej, Materiałowej i Fizyki Stosowanej PCz, Częstochowa 2005.
5. Leyko L., Mechanika ogólna, t. II, Dynamika, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1996.
6. Respondowski R., Laboratorium z fizyki, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 1999.
7. Szczeniowski S., Fizyka doświadczalna, cz. 1, Mechanika i akustyka, PWN, Warszawa 1980.
8. Szydłowski H., Pracownia fizyczna wspomagana komputerem, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2003.

Zasada sporządzania wykresów

Prawidłowe opracowanie wyników pomiarów wymaga wykonania odpowiedniego wykresu. Podczas robienia wykresu należy kierować się następującymi zasadami:

1. Wykres wykonuje się na papierze milimetrowym. Na układzie współrzędnych definiujemy liniowe osie liczbowe w przedziałach zgodnych z przedziałami zmienności wartości X i Y ; oznacza to, że na każdej z osi odkładamy tylko taki zakres zmian mierzonej wielkości fizycznej, w którym zostały wykonane pomiary. Nie ma zatem obowiązku odkładania na osiach punktów zerowych, gdy nie było w ich okolicy punktów pomiarowych (chyba, że w dalszej analizie konieczne będzie odczytanie wartości Y dla X=0). Skalę na osiach układu nanosimy zazwyczaj w postaci równooddalonych liczb. Ich wybór i gęstość na osi musi zapewniać jak największą prostotę i wygodę korzystania z nich.
   Na osiach wykresu muszą być umieszczone odkładane wielkości fizyczne i ich jednostki lub wymiary.

2. Punkty nanosimy na wykres tak, by były wyraźnie widoczne, zaznaczamy je kółkami, trójkątami, kwadracikami itp. Na rysunku należy zaznaczyć również niepewności pomiarowe w postaci prostokątów lub odcinków .
   Graficzne przedstawienie niepewności systematycznej:
   Załóżmy, że wartości x i y otrzymane z pomiarów są obarczone odpowiednio niepewnościami Δx i Δy. Oznacza to, że rzeczywiste wartości tych wielkości mieszczą się w przedziałach od $x-\Delta x$ do $x + \Delta x$ oraz od $y-\Delta y$ do $y + \Delta y$. Na wykresie zależności Y(X) przedziały te wyznaczają wokół punktów (x,y) prostokąty o bokach $2\Delta x$ i $2\Delta y$. Niepewności te można również zaznaczać wokół punktu pomiarowego (x,y) poprzez odcinki o długości $2\Delta x$ i $2\Delta y$ (rys.1)



Rys.1 Zaznaczanie niepewności wokół punktów pomiarowych.

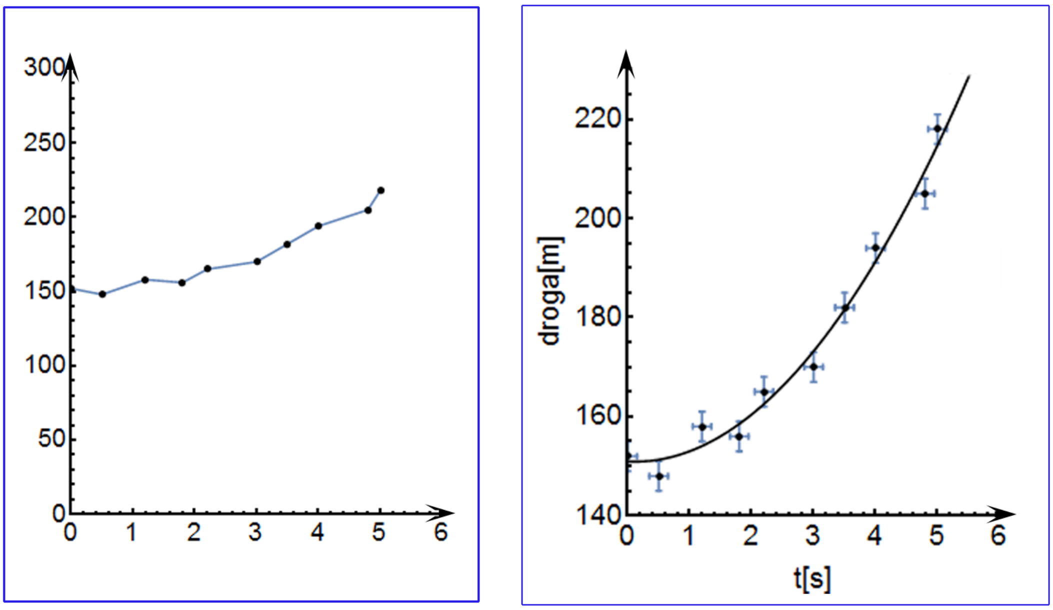
Uwaga: Jeżeli wartość zmiennej X jest dokładnie znana (czyli Δx=0), to na wykresie zaznaczamy tylko niepewności na osi zmiennej zależnej (na osi y).

3. Rozmiar wykresu nie jest dowolny i nie powinien wynikać z tego, że dysponujemy takim, a nie innym kawałkiem papieru (na rys.2 arkusz papieru milimetrowego zaznaczony jest kolorem niebieskim). Rozmiar powinien być określony przez niepewności pomiarowe tych wielkości, które odkłada się na osiach. Niepewność ta powinna w wybranej skali być odcinkiem o łatwo zauważalnej, znaczącej długości .

4. Następnie prowadzimy odpowiednią krzywą (nie może to być linia łamana!) tak, by przecinała w miarę możliwości punkty pomiarowe, ale nie należy dążyć do tego, aby przechodziła ona przez wszystkie punkty, ponieważ każdy z nich obarczony jest niepewnością. W przypadku dużych rozrzutów staramy się, by ilość punktów poniżej i powyżej krzywej była zbliżona- w ten sposób uśredniamy graficznie wyniki pomiarów. W przypadku zależności nieliniowych korzystamy z krzywików.

5. Każdy rysunek powinien być podpisany. Etykieta wykresu wyjaśnia, co rysunek zawiera, co reprezentują zaznaczone krzywe.

PODSUMOWANIE:



zły wykres   dobry wykres

Rys.2