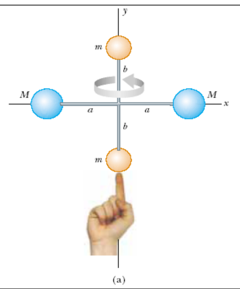
KATEDRA FIZYKI

WYDZIAŁ INŻYNIERII PRODUKCJI
I TECHNOLOGII MATERIAŁÓW
POLITECHNIKA CZĘSTOCHOWSKA

PRACOWNIA
MECHANIKI



ĆWICZENIE NR M-4

WYZNACZANIE

MOMENTU BEZWŁADNOŚCI BRYŁ

ZA POMOCĄ DRGAŃ SKRĘTNYCH

I. Zagadnienia do przestudiowania

1. Ruch harmoniczny prosty.
2. Drgania torsyjne bryły sztywnej.
3. Moment bezwładności punktu i bryły sztywnej.
4. Tensor momentu bezwładności bryły sztywnej.

II. Wprowadzenie teoretyczne

Ruch obrotowy bryły sztywnej opisuje II zasada dynamiki dla ruchu obrotowego w postaci

$$\frac{dL}{dt} = \vec{M} \tag{1}$$

Moment pędu bryły danego punktu bryły L_i w układzie związanym ze środkiem masy określa zależność

$$L_i \equiv r_i \times \left(m_i v_i\right) = r_i \times p_i \tag{2}$$

Natomiast moment siły M_i ma postać

$$M_i \equiv r_i \times F_i \tag{3}$$

Prędkość *i*-tego punktu względem początku układu $v_i = \omega \times r_i$.
Stąd wyrażenie na moment pędu całego ciała

$$\vec{L} \equiv \sum_{i=1}^{n} \vec{r_i} \times \left(m_i \vec{v_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r_i} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r_i}\right) \tag{4}$$

Skorzystamy z tożsamości wektorowej

$$\vec{a} \times \left(b \times \vec{c}\right) = b\left(\vec{a}\, c\right) - \vec{c}\left(\vec{a}\, b\right)$$

Podstawiając, otrzymujemy

$$\vec{L} \equiv \sum_{i=1}^{n} m_i \left[\vec{\omega} r_i^2 - \vec{r_i}\left(\vec{r_i}\, \vec{\omega}\right)\right] \tag{5}$$

Wszystkie punkty mają tę samą prędkość kątową ω, możemy więc zapisać powyższe równanie wektorowe jako układ trzech równań dla poszczególnych składowych ω:

$$\begin{aligned} L_x &\equiv \omega_x \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 - \sum_{i=1}^{n} m_i x_i \left(\vec{r_i}\,\vec{\omega}\right) \\ L_y &\equiv \omega_y \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 - \sum_{i=1}^{n} m_i y_i \left(\vec{r_i}\,\vec{\omega}\right) \\ L_z &\equiv \omega_z \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 - \sum_{i=1}^{n} m_i z_i \left(\vec{r_i}\,\vec{\omega}\right) \end{aligned} \tag{6}$$

Ponieważ

$$r_i\,\omega = x_i\omega_x + y_i\omega_y + z_i\omega_z$$

otrzymujemy dla składowej *x*-owej momentu pędu wyrażenie

$$L_x = \omega_x \sum_{i=1}^{n} m_i \left(r_i^2 - x_i^2\right) - \omega_y \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i - \omega_z \sum_{i=1}^{n} m_i x_i z_i \tag{7}$$

Dla pozostałych składowych:

$$\begin{aligned} L_y &= -\omega_x \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i + \omega_y \sum_{i=1}^{n} m_i \left(r_i^2 - y_i^2\right) - \omega_z \sum_{i=1}^{n} m_i y_i z_i \\ L_z &= -\omega_x \sum_{i=1}^{n} m_i x_i z_i - \omega_y \sum_{i=1}^{n} m_i y_i z_i + \omega_z \sum_{i=1}^{n} m_i \left(r_i^2 - z_i^2\right) \end{aligned} \tag{8}$$

Wprowadzając oznaczenia:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \sum_{i=1}^{n} m_i \left(r_i^2 - x_i^2\right) \\ I_{xy} &= -\sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2 y_i^2 \\ I_{xz} &= -\sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2 z_i^2 \end{aligned} \tag{9}$$

i analogicznie dla pozostałych sum otrzymamy układ równań:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \sum_{i=1}^{n} m_i \left(r_i^2 - x_i^2\right) \\ I_{xy} &= -\sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2 y_i^2 \\ I_{xz} &= -\sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2 z_i^2 \end{aligned} \tag{10}$$

Ostatecznie równanie, wiążące wektor momentu pędu $\boldsymbol{L}$ z wektorem prędkości kątowej $\boldsymbol{\omega}$, w zapisie macierzowym przyjmie postać

$$\begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \tag{11}$$

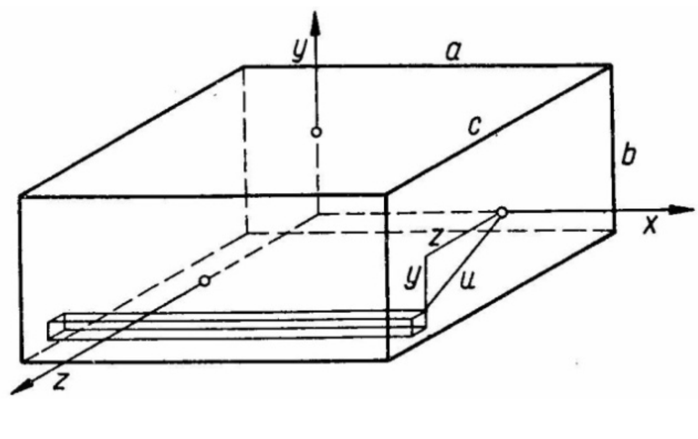
Macierz z prawej strony równania to *tensor bezwładności drugiego rzędu,* a jego elementy nazywamy współczynnikami bezwładności lub *momentami bezwładności*.

W praktyce w przypadku brył mamy do czynienia z ciągłym rozkładem masy $(n \to \infty)$ i sumowanie w powyższych wyrażeniach zastępujemy całkowaniem objętościowym. Wtedy dla przykładu elementy pierwszego wiersza macierzy: tensora bezwładności obliczamy jako:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int_V \rho(\vec{r})\left(r^2 - x^2\right)dV = \int_V \rho(\vec{r})(y^2 + z^2)dV \\ I_{xy} &= \int_V \rho(\vec{r})xy\, dV \\ I_{xz} &= \int_V \rho(\vec{r})xz\, dV \end{aligned} \tag{12}$$

Analogiczne wzory możemy otrzymać dla pozostałych składowych tensora.

Można wykazać, że suma współczynników bezwładności leżących na głównej przekątnej (tzw. elementów diagonalnych) $I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}$ nie zależy od orientacji ciała względem układu współrzędnych. Współczynniki o wskaźnikach mieszanych zwane są *momentami zboczenia* i charakteryzują asymetrię. Można jednak wybrać takie osie prostokątnego układu współrzędnych, kiedy to zboczenia zerują się. Takie osie nazywamy *głównymi osiami bezwładności*, im momenty bezwładności - *głównymi momentami bezwładności.* Dla kuli trzy główne momenty bezwładności są jednakowe. W przypadku ogólnym wielkości te są różne, a ruch obrotowy względem osi odpowiadających maksymalnemu lub minimalnemu momentowi bezwładności cechuje stała orientacja bryły w przestrzeni. Takie osie nazywane są *osiami swobodnymi* bryły sztywnej.



Rys. 1. Prostopadłościan w układzie współrzędnych

Wyprowadźmy teraz wzory określające momenty bezwładności prostopadłościanu o masie *m* i krawędziach a, b i c względem osi prostopadłych do poszczególnych ścian przechodzących przez ich środki (tj. osi głównych). W układzie współrzędnych przyjętym na rysunku 1 moment bezwładności prostopadłościanu względem osi x dany jest wzorem (12)

$$I_{xx} = \int \rho (y^2 + z^2) dV$$

gdzie $dV = adydz$ oraz $u^2 = y^2 + z^2$

Zatem
$$I_{xx} = \frac{m}{bc} \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(y^2 + z^2 \right) dydz$$

Możemy zmienić granice całkowania i wówczas

$$I_{xx} = 4\frac{m}{bc} \int_{0}^{\frac{c}{2}} \int_{0}^{\frac{b}{2}} \left(y^2 + z^2 \right) dydz = 4\frac{m}{bc} \int_{0}^{\frac{c}{2}} \left(\frac{b^3}{24} + \frac{z^2 b}{2} \right) dz$$

Ostatecznie

$$I_{xx} = 4\frac{m}{bc} \left(\frac{b^3 c}{48} + \frac{bc^3}{48} \right) = \frac{1}{12} \left(b^2 + c^2 \right) \tag{13a}$$

W podobny sposób możemy otrzymać wyrażenia na momenty bezwładności graniastosłupa względem osi y i z

$$I_y = \frac{1}{12} \left(a^2 + c^2 \right) \tag{13b}$$

oraz

$$I_z = \frac{1}{12} \left(a^2 + b^2 \right) \tag{13c}$$

III. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie momentu bezwładności brył w kształcie prostopadłościanu dla dowolnie wybranej osi obrotu. Pomiary przeprowadzone dla kierunków wzdłuż osi głównych możemy zweryfikować, posługując się wzorami (13a,b,c), natomiast w przypadku dowolnej osi, posługując się wzorem uwzględniającym tzw. kosinusy kierunkowe danej osi obrotu

$$I = I_{xx} \cos^2 \alpha + I_{yy} \cos^2 \beta + I_{zz} \cos^2 \gamma \tag{14}$$

gdzie α, β i γ - kąty określające położenie osi obrotu względem osi x, y i z (lub a, b i c). Dla przykładu kosinusy kierunkowe osi przechodzących wzdłuż głównych przekątnych prostopadłościanu wynoszą:

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$
$$\cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \tag{15}$$
$$\cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

IV. Zasada pomiaru

W pomiarze wykorzystujemy wahadło skrętne (torsyjne), którego istotną częścią jest zamocowana na stosunkowo sztywnych drutach ramka. Ramka zaopatrzona jest w odpowiednie pokrętła śrubowe, a bryły - wzorcowa i badane - posiadają odpowiednie otwory; dzięki czemu możliwe jest dogodne i stabilne mocowanie brył w ramce.

Najpierw wprawiamy w drganie ramkę nieobciążoną bryłą. Niech okres drgań wynosi tym razem T_0. Określony jest on zależnością

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{D}} \tag{16}$$

gdzie: I_0 - moment bezwładności nieobciążonej ramki, D - moment kierujący wahadła.

Następnie umieszczamy w ramce bryłę foremną o znanym momencie bezwładności I_w i tak obciążoną ramkę wprawiamy w drgania, których okres oznaczamy przez T_w. Możemy napisać

$$T_w = 2\pi\sqrt{\frac{I_0+I_w}{D}} \tag{17}$$

Podnosząc równania (16) i (17) do kwadratu, a następnie odejmując stronami, obliczamy moment kierujący D

$$D = \frac{4\pi^2 I_w}{T_w^2 - T_0^2} \tag{18}$$

Teraz wyjmujemy z ramki bryłę o znanym momencie bezwładności, a umieszczamy na nim bryłę o szukanym momencie bezwładności I_x.

W tym przypadku okres drgań oznaczamy jako T_x. Występuje on w równaniu

$$T_x = 2\pi\sqrt{\frac{I_0+I_x}{D}} \tag{19}$$

Odejmując od siebie stronami po podniesieniu do kwadratu równań (16) i (17) oraz podstawiając do równania (17) wartość D, otrzymujemy

$$I_x = \frac{T_x^2 - T_0^2}{T_w^{\,2} - T_0^2} I_w \tag{20}$$

V. Zestaw pomiarowy

Zestaw pomiarowy zawiera obciążniki o następujących parametrach:

1. walec wykorzystywany jako bryła wzorcowa:
   masa walca - 1,175 kg
   promień walca - 0,025 m
2. badany obciążnik I:
   masa obciążnika I - 1,962 kg
   wymiary obciążnika II - 0,05 m × 0,05 m × 0,1 m
3. badany obciążnik II:
   masa obciążnika II - 1,884 kg
   wymiary obciążnika II - 0,04 m × 0,06 m × 0,1 m

VI. Przebieg ćwiczenia

1. Włączyć sznur sieciowy układu pomiarowego do sieci zasilającej.
2. Wcisnąć przycisk **СЕТЬ** (SIEĆ), kontrolując, czy wszystkie wskaźniki mierników wskazują cyfrę zero, a także czy świeci się żarówka czujnika fotoelektrycznego.
3. Elektromagnes ustawić w zadanym położeniu (np. 25°) na płycie i ustalić jego położenie, dokręcając nakrętkę.
4. Skręcając ramkę przyrządu, zbliżyć jej wysięgnik do elektromagnesu tak, aby jego działanie ustaliło położenie pierwotne ramki.
5. Nacisnąć przycisk **ПУСК** (START); co spowoduje uwolnienie wysięgnika ramki i rozpoczęcie drgań.
6. Następnie nacisnąć przycisk (ZERO), co spowoduje rozpoczęcie pomiaru.
7. Po naliczeniu przez miernik co najmniej $n_s = 9$ drgań skrętnych nacisnąć klawisz **СТОП** (STOP). Układ zakończy pomiar czasu t dla $n = n_s + 1$ drgań.
8. Obliczyć okres drgań wahadła skrętnego ze wzoru:

$$T = \frac{t}{n} \tag{21}$$

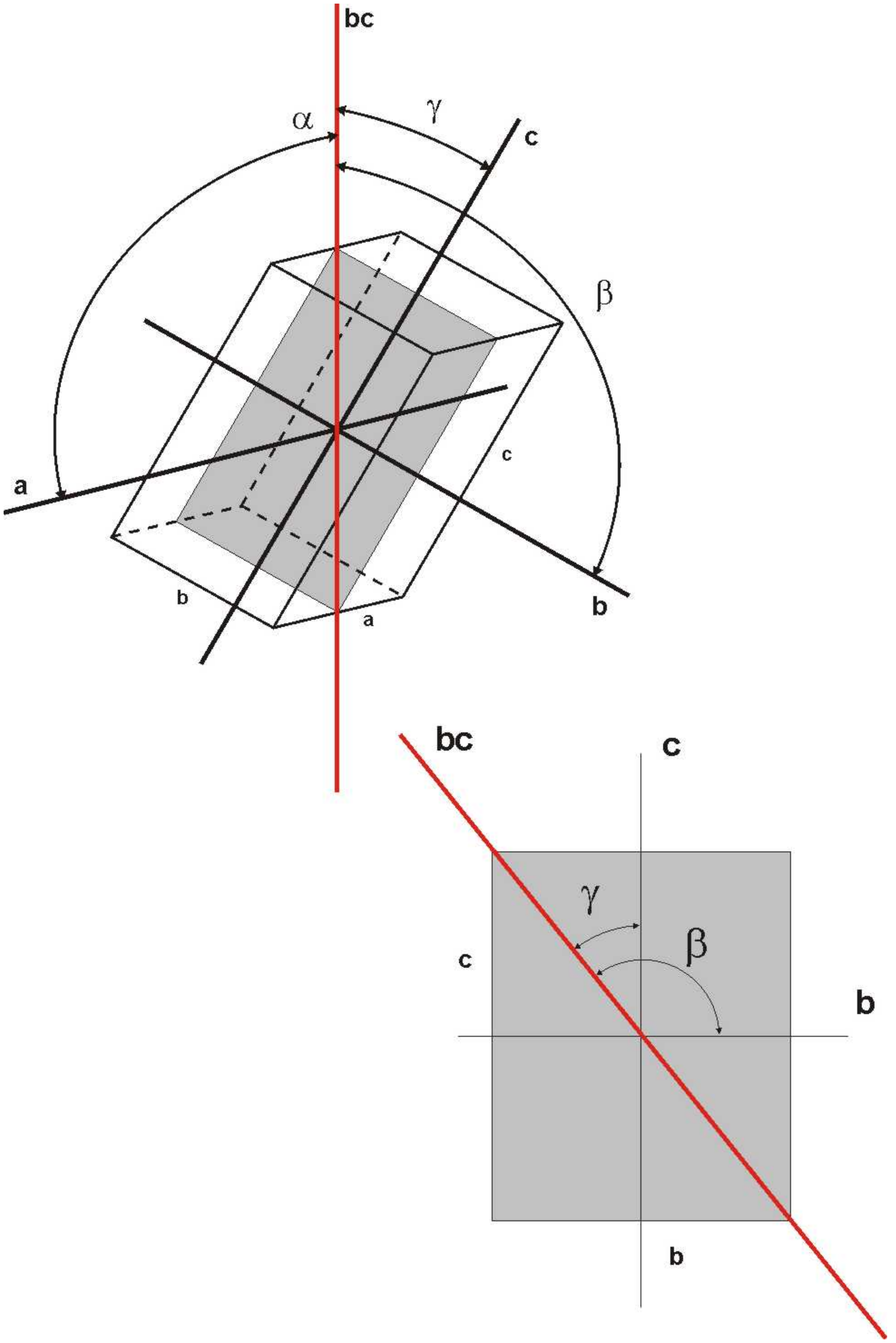
gdzie: T - okres drgań skrętnych wahadła; t - czas drgań; n - liczba drgań.

9. W ramce przyrządu umocować bryłę wzorcową (walec).

UWAGA: ***Należy czynność tę wykonywać bardzo ostrożnie, aby nie uszkodzić drutu stalowego wahadła, na którym podwieszona jest ramka przyrządu. W celu włożenia lub wymiany obciążnika wystarczy poluzować dwie nakrętki ruchomej poprzeczki ramki, odsuwając lub dosuwając poprzeczkę w pożądane położenie.***

10. Powtórzyć czynności od punktu 5 do 8.

11. Pomiary przeprowadzić dla pozostałych dwóch obciążników dla różnych ustawień osi. Zaleca się zastosować zasadę symboliki (oznaczania) osi obrotu zilustrowaną na rysunku 2. I tak np.: oś obrotu równoległą do krawędzi a i przechodzącą przez środki ścian o krawędziach b i c (dla zamocowania w otworach znajdujących się w środkach tych ścian) oznaczyć symbolem a, a moment bez-władności względem tej osi obrotu jako I_a. Analogicznie postępujemy dla momentów bezwładności I_b, I_c.
    Oś obrotu odpowiadającą zamocowaniu w środkach krawędzi a, tzn. oś, której orientacja pokrywa się z orientacją przekątnej przekroju osiowego o wymiarach b i c oznaczyć symbolem bc i odpowiedni moment bezwładności jako I_{bc}.



Rys. 2. Ilustracja zasady oznaczania osi obrotu w odniesieniu do krawędzi prostopadłościanu

VII. Tabela pomiarowa

<table>
<tr><th>Rodzaj obciążnika</th><th>Masa obciążnika
m [kg]</th><th>Wymiary obciążnika
a×b×c [m]</th><th>Oś obrotu</th><th>Liczba drgań
n</th><th>Czas drgań
t [s]</th><th>Okres drgań
T [s]</th><th>Moment bezwładności wyznaczony
$I_{eksp.}$ [kgm^2]</th><th>Moment bezwładności obliczony
$I_{obl.}$ [kgm^2]</th></tr>
<tr><td>Ramka</td><td>-----------</td><td>-------------</td><td>-------</td><td></td><td></td><td></td><td>----------------------------------</td><td>----------------------------------</td></tr>
<tr><td>Walec</td><td>1,175</td><td>r = 0,025</td><td>-------</td><td></td><td></td><td></td><td>----------------------------------</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="5">I</td><td rowspan="5">1,962</td><td rowspan="5">0,05
0,05
0,1</td><td>a</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>c</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>ac</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>aa</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>aac</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="7">II</td><td rowspan="7">1,884</td><td rowspan="7">0,04
0,06
0,1</td><td>a</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>c</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>ac</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>bc</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>ab</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>abc</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Bryłą o znanym momencie bezwładności jest walec, którego moment bezwładności obliczony dla kierunku osi wzdłuż wysokości wynosi $I_w = \frac{1}{2} mr^2$.

VIII. Opracowanie ćwiczenia

1. Obliczyć moment bezwładności bryły wzorcowej (walca) I_w ze wzoru

$$I_w = \frac{1}{2} m r^2$$

2. Moment bezwładności wyznaczony eksperymentalnie I_x:
   a) Obliczyć wyznaczony moment bezwładności brył I_x ze wzoru

$$I_x = \frac{T_x^2 - T_0^2}{T_w^2 - T_0^2} I_w$$

   gdzie: T_0 - okres drgań ramki, T_x - okres drgań badanej bryły, T_w - okres drgań bryły wzorcowej (walca), I_w - moment bezwładności bryły wzorcowej.
   Wyniki wpisać do tabeli.
   b) Dla jednego wybranego przypadku obliczyć błędy bezwzględny i względny momentu bezwładności I_x.
3. Obliczyć moment bezwładności teoretyczny I_{obl} względem różnych osi obrotu z zachowaniem następujących zasad
   a) Moment bezwładności prostopadłościanu o masie m i krawędziach a, b i c względem osi równoległej do krawędzi a i przechodzącej przez środki ścian o krawędziach b i c - pierwszy z tzw. głównych momentów bezwładności obliczamy ze wzoru

$$I_{a,\,obl} = \frac{1}{12} m\left(b^2 + c^2\right) \tag{22}$$

   Podobnie:

$$I_{b,\,obl} = \frac{1}{12} m\left(a^2 + c^2\right) \tag{23}$$

$$I_{c,\,obl} = \frac{1}{12} m\left(a^2 + b^2\right) \tag{24}$$

   b) Moment bezwładności bryły względem dowolnie wybranej osi przechodzącej przez środek bryły obliczyć ze wzoru

$$I_{obl} = I_a \cos^2\alpha + I_b \cos^2\beta + I_c \cos^2\gamma \tag{25}$$

   gdzie: I_a, I_b, I_c są głównymi momentami bezwładności, α, β, γ to kąty, jakie tworzy oś obrotu z kierunkami głównymi, tj. osiami a, b, c.
4. Porównać moment bezwładności wyznaczony i teoretyczny.
5. Przeprowadzić dyskusję uzyskanych wyników.

Literatura

1. Respondowski R., Laboratorium z fizyki, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 1999.
2. Szczeniowski S., Fizyka doświadczalna, cz. 1, Mechanika i akustyka, PWN, Warszawa 1980.
3. Szydłowski H., Pracownia fizyczna wspomagana komputerem, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2003.
4. Wróblewski A.K., Zakrzewski J.A., Wstęp do fizyki, PWN, Warszawa 1989.