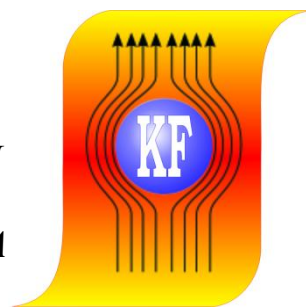
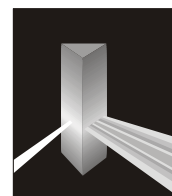


KATEDRA FIZYKI

**WYDZIAŁ INŻYNIERII PRODUKCJI
I TECHNOLOGII MATERIAŁÓW
POLITECHNIKA CZĘSTOCHOWSKA**



PRACOWNIA OPTYKI



ĆWICZENIE NR 0-7

POMIAR PROMIENI KRZYWIZNY

SOCZEWKI PŁASKO-WYPUKŁEJ

METODĄ PIERŚCIENI NEWTONA

I. Zagadnienia do opracowania

1. Zjawisko dyfrakcji i interferencji światła.
2. Doświadczenie Younga. Warunki powstawania minimum i maksimum interferencyjnego.
3. Superpozycja fal, fale spójne, interferencja fal jako szczególny przypadek superpozycji fal.
4. Powstawanie pierścieni Newtona. Wyprowadzić wzór na promień pierścienia Newtona.
5. Regresja liniowa.

II. Wprowadzenie teoretyczne

2.1. Zjawisko interferencji fal

Jeżeli w ośrodku rozchodzą się dwie fale pochodzące z dwóch źródeł to w punkcie, w którym się spotkają, każda z fal wywoła wychylenie od położenia równowagi jakby nie było drugiej fali. Wypadkowe wychylenie będzie, więc sumą geometryczną wychyleń składowych zgodnie z prawem składania małych wychyleń. Pod pojęciem małych wychyleń należy rozumieć wychylenia powodujące odkształcenia ośrodka zgodnie z prawem Hooke'a. Szczególnym przypadkiem nakładania (inaczej superpozycji) się dwóch lub więcej fal jest zjawisko interferencji. Warunkiem wystąpienia zjawiska interferencji fal jest ich spójność (koherentność) tzn. niezmiennosc w czasie przesunięcia fazowego. Oznacza to, że interferujące fale zachowują niezmienną w czasie odległość np. „szczytów”.

Zjawisko to omówimy na przykładzie interferencji dwóch fal płaskich (fala płaska rozchodzi się w jednym kierunku np. wzdłuż osi X), harmonicznym (przy rozchodzeniu się fali harmonicznym każda cząstka ośrodka drga ruchem harmonicznym prostym) o tych samych częstościach kołowych ω , długościach fal λ i amplitudach A, biegnących z taką samą prędkością i w tym samym kierunku. Fale te różnią się tylko fazą o kąt ϕ . Równania tych fal mają postać:

$$y_1(x, t) = A \sin(kx - \omega t - \phi) = A \sin\left(x - \frac{\omega t}{k} - \frac{\phi}{k}\right) \quad (1)$$

$$y_2(x, t) = A \sin(kx - \omega t) = A \sin\left(x - \frac{\omega t}{k}\right) \quad (2)$$

gdzie $k = 2\pi/\lambda$ jest wektorem falowym, λ długością fali.

Przesunięcie fazowe o kąt ϕ oznacza, że np. „szczyty” fal w układzie współrzędnych $y = f(x)$ są przesunięte względem siebie o odległość $\Delta x = \phi/k$.

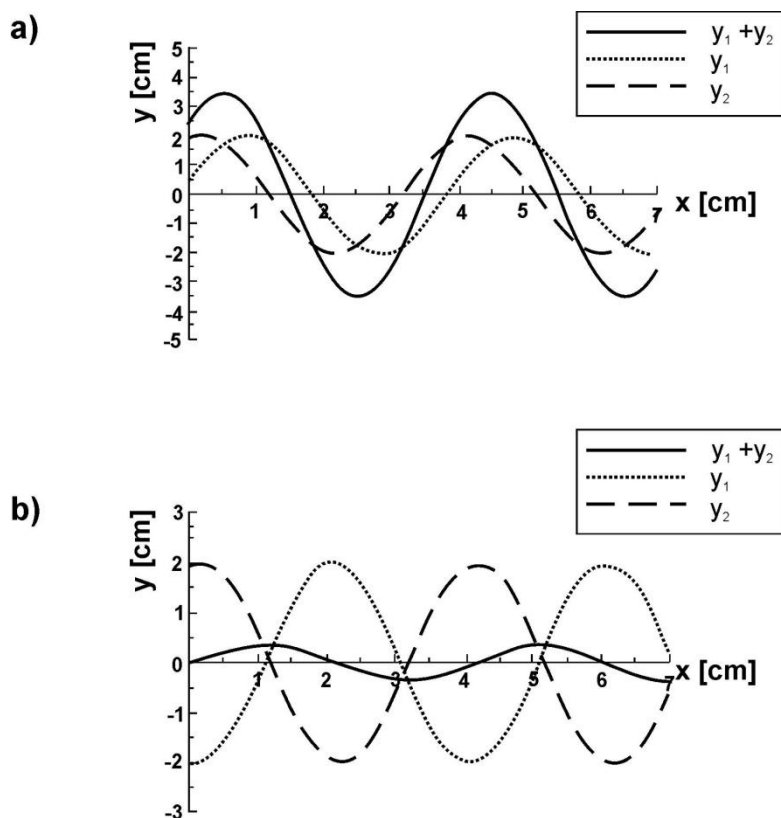
Falę wypadkową opisuje suma równań (1) i (2):

$$y_1 + y_2 = 2A \cos \frac{\phi}{2} \sin\left(kx - \omega t - \frac{\phi}{2}\right) = A \sin\left(kx - \omega t - \frac{\phi}{2}\right) \quad (3)$$

Równanie (3) otrzymujemy przez zastosowanie wzoru na sumę sinusów:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (4)$$

Fala wypadkowa posiada tę samą częstość, co fale składowe oraz amplitudę $A = 2A\cos(\varphi/2)$ zależną od przesunięcia fazowego φ . Na rysunku 1 przedstawiono nakładanie się dwóch fal harmonicznych dla dwóch przesunięć fazowych $\varphi = 60^\circ$ i 170° . Jeżeli $\varphi = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$ mówimy, że fale spotykają się w tych samych fazach (np. „szczyt” jednej fali spotyka się ze „szczytem” drugiej). Amplituda fali wypadkowej osiągnie wartość maksymalną $A = 2A$ ponieważ $\cos(\varphi/2) = 1$. W punkcie, w którym fale spotykają się w tych samych fazach powstaje maksimum interferencyjne. Jeżeli $\varphi = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$ fale spotykają się w fazach przeciwnych (tj. „szczyt” jednej fali spotyka się z „doliną” drugiej), a amplituda $A = 0$ ponieważ $\cos(\varphi/2) = 0$. W miejscu spotkania się tych fal powstaje minimum interferencyjne.



Rys. 1. Interferencja fal o tych samych amplitudach, długości i prędkości rozchodzenia się, przesuniętych w fazie o 60° (a) i 170° (b)

Dla pozostałych wartości φ amplituda fali wypadkowej będzie osiągała wartości pośrednie między 0 i $2A$.

Dwie spójne fale świetlne otrzymamy m.in. wtedy, gdy światło wychodzące z punktowego źródła skierujemy na dwie wąskie szczeliny. Różnica faz między falami powstanie z powodu różnicy dróg optycznych, jakie przebiegną te fale do punktu, w którym nastąpi interferencja (drogą optyczną nazywamy iloczyn drogi geometrycznej i bezwzględnej współczynnika załamania n ośrodka, w którym rozchodzi się fala; dla powietrza $n = 1$). Maksimum interferencyjne występuje dla $\varphi = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$ oznacza, że różnica dróg $\Delta s = \frac{\phi}{k} = \frac{\phi\lambda}{2\pi}$ przyjmuje wartości $0, \lambda, 2\lambda, \dots, k\lambda$ gdzie k jest liczbą całkowitą.

Minimum interferencyjne wystąpi wówczas gdy $\varphi = \pi, 3\pi, 5\pi \dots$ czyli dla $n \cdot \Delta s = \frac{\lambda}{2}, 3\frac{\lambda}{2}, 5\frac{\lambda}{2} \dots, (2k + 1)\frac{\lambda}{2}$.

Jeżeli więc różnica dróg optycznych przebytych przez dwie fale świetlne do punktu w którym nastąpi interferencja będzie równa całkowitej wielokrotności długości fali to otrzymamy maksimum interferencyjne:

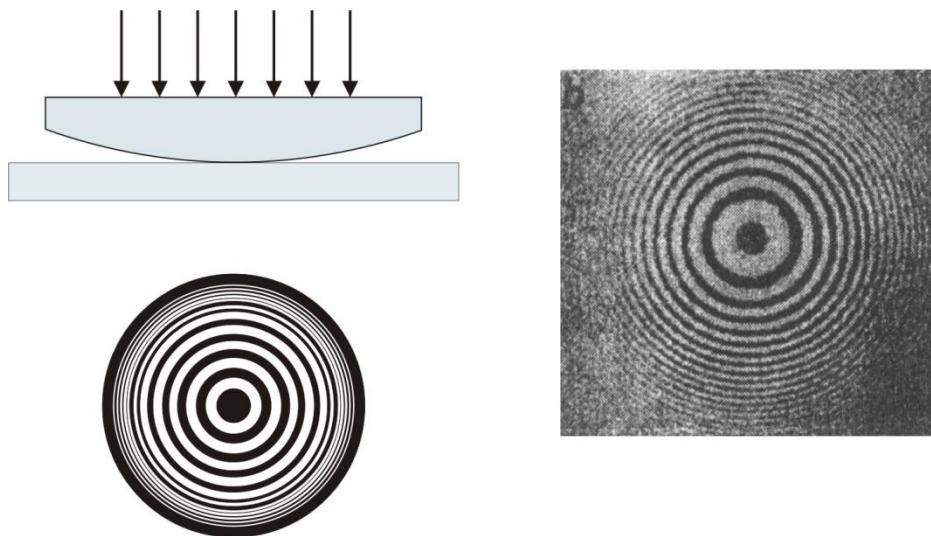
$$n \cdot \Delta s = k\lambda \quad (5)$$

Jeżeli natomiast różnica dróg optycznych będzie równa nieparzystej wielokrotności połówek długości fali, w miejscu nałożenia się fal świetlnych wystąpi minimum interferencyjne:

$$n \cdot \Delta s = (2k + 1) \lambda/2 \quad (6)$$

III. Zasada pomiaru

Jednym z przykładów interferencji światła jest powstanie tzw. pierścieni Newtona. Do ich otrzymania stosujemy zestaw płasko – równoległej płytki szklanej i soczewki płasko – wypukłej o promieniu krzywizny rzędu kilku metrów, oświetlonych światłem monochromatycznym (jednobarwnym), padającym prostopadle do powierzchni płytek.

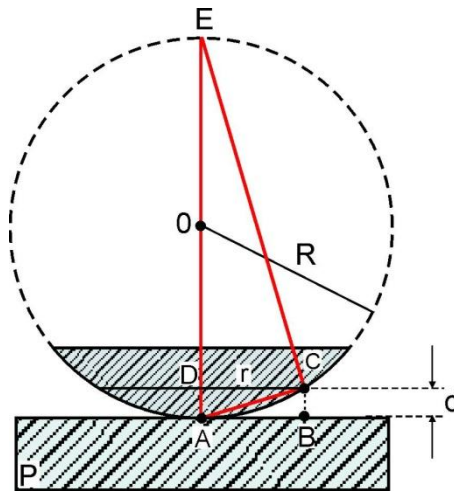


Rys. 2. Pierścienie Newtona

Dla przejrzystości na rys.3 przedstawiono soczewkę o bardzo małym promieniu krzywizny. Należy pamiętać, że w rzeczywistości grubość warstwy powietrza między płytkami jest rzędu kilku długości fali.

Interferencja zachodzi pomiędzy promieniami odbitymi od dolnej powierzchni soczewki (np. w punkcie C) i od górnej powierzchni płytki płasko – równoległej (np. w punkcie B). Prążki

interferencyjne odpowiadające jednakowej grubości warstwy powietrza będą tworzyły współśrodkowe okręgi, na przemian jasne i ciemne, zwane pierścieniami Newtona. Ciemny środek oznacza, że w miejscu styku płytek występuje minimum interferencyjne. Promienie odbite od soczewki i płytki płasko – równoległej w miejscu styku mają te same długości drogi optycznej, ale odbicie od płytki zachodzi ze zmianą fazy o π , ponieważ promień światła odbija się od ośrodka optycznie gęstszy (ośrodek o większym współczynniku załamania). Odpowiada to różnicy dróg optycznych równej $\lambda/2$.



Rys. 3. Schemat do obliczenia pierścienia Newtona

Przypuśćmy, że w odległości r od środka pierścieni powstaje prążek ciemny. Oznacza to, że powstanie on w wyniku interferencji dwóch promieni, dla których jest spełniony warunek dany wzorem (6). Promień odbity od górnej powierzchni płytki ma drogę optyczną dłuższą o $2d$ od drogi promienia odbitego od soczewki wypukłej. Uwzględniając zmianę fazy o π przy odbiciu od płytki, otrzymamy wzór na różnicę dróg optycznych ($n=1$ dla powietrza):

$$\Delta s = 2d + \frac{\lambda}{2} \quad (7)$$

Porównując wzory (6) i (7) otrzymujemy:

$$2d + \frac{\lambda}{2} = (2k + 1) \frac{\lambda}{2} \Rightarrow d = k \frac{\lambda}{2} \quad (8)$$

Z trójkąta prostokątnego ACE (kąt ACE jest prosty, ponieważ jest to kąt wpisany, oparty na średnicy) obliczamy:

$$DC^2 = AD \cdot DE \quad (9)$$

Korzystamy tutaj ze znanego z geometrii twierdzenia, że w trójkącie prostokątnym kwadrat wysokości jest równy iloczynowi odcinków, na które ta wysokość dzieli podstawę. Ponieważ $DC = r_k$, $AD = d$, $DE = 2R - d$ możemy zapisać:

$$r_k^2 = (2R - d) \cdot d \quad (10)$$

Ponieważ d możemy zaniedbać w porównaniu z R , wobec tego:

$$r_k^2 = 2 R d$$

Wykorzystując zależność (8) otrzymujemy:

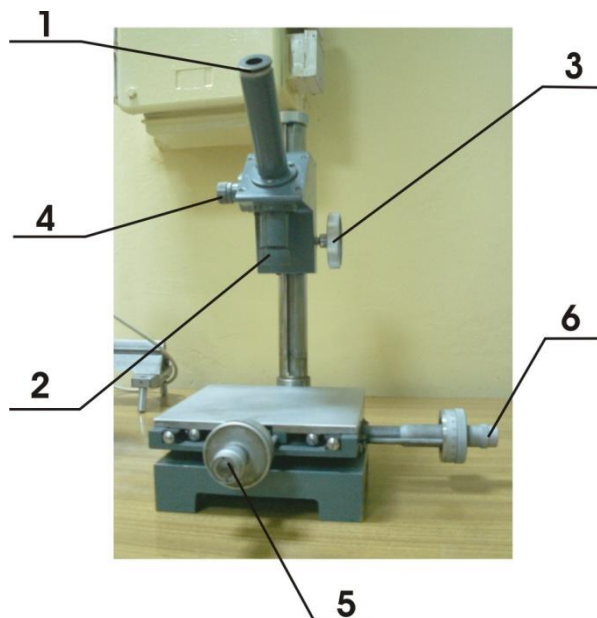
$$r_k^2 = k \lambda R \quad (11)$$

Zatem znając promień k – tego prążka Newtona i długość fali możemy obliczyć promień krzywizny R soczewki płasko – wypukłej.

W zakończeniu należy podkreślić, że prawidłowy kształt pierścieni Newtona ulega zakłóceniu nawet przy nieznaczących niedokładnościach w obróbce powierzchni sferycznej soczewki i górnej powierzchni płytki. Dlatego obserwacja pierścieni pozwala przeprowadzić szybką i dokładną kontrolę jakości szlifów powierzchni płaskich i soczewek.

IV. Zestaw pomiarowy

Mikroskop, zestaw płasko-równoległej płytki szklanej i soczewki płasko-wypukłej, lampa sodowa.



Rys. 4. Mikroskop do obserwacji pierścieni Newtona

W celu wykonania ćwiczenia posługujemy się mikroskopem (rys.4) oraz układem płytek opisanych w poprzednim rozdziale. Światło lampy sodowej pada na soczewkę umieszczoną z lewej strony mikroskopu (4). Po odbiciu od zwierciadła ustawionego pod kątem 45° do pionu, znajdującego się wewnątrz mikroskopu, strumień światła jest kierowany prostopadłe na układ płytek. Powiększony obraz pierścieni obserwujemy w okularze mikroskopu (oznaczony numerem 1 na rys.4). Ostrość pierścieni ustawiamy za pomocą pokrętki 3. W okularze widoczny jest krzyż z nici pajęczej, który możemy ustawić na dowolnym prążku za pomocą śrub mikrometrycznych przymocowanych do stolika mikroskopu (oznaczone przez 5 i 6 na rys.4)

V. Przebieg ćwiczenia

1. Włączamy do sieci zasilacz lampy sodowej (należy odczekać ok. 10 min., aby lampa rozgrzała się).
2. Kładziemy na stoliku mikroskopu płytkę grubości 25 mm stroną matową do stolika mikroskopu. Na płytkę kładziemy soczewkę, tak, aby strzałka zaznaczona na jej bocznej powierzchni była skierowana ostrzem w dół.
3. Ustawiamy lampę sodową na wprost soczewki 4 (Rys. 4) mikroskopu.
4. Pokrętle 3 (Rys. 4) przesuwamy kolumnę mikroskopu tak, aby w polu widzenia ukazał się ostry obraz pierścieni Newtona przy czym w środku powinien znajdować się ciemny prążek.
5. Pokrętle 5 i 6 (Rys. 4) śrub mikrometrycznych sprowadzamy środek krzyża nici pajęczej do pokrycia się z środkiem pierścieni.
6. Następnie pokrętle 6 (Rys. 4) śruby mikrometrycznej sprowadzamy środek krzyża nici pajęczej do pokrycia się z k-tym ($k \geq 5$) prążkiem po lewej stronie, następnie po prawej odczytując wskazania mikrometru l i p, l – p będzie średnicą promienia.
7. Czynność 6 wykonujemy dla 12 różnych pierścieni.
8. Wyniki l i p wpisujemy do Tabeli
9. Dla wybranego pierścienia trzykrotnie odczytujemy wskazania mikrometru po lewej i prawej stronie, wyniki wpisujemy pod tabelą pomiarową .

VI. Tabela pomiarowa

Numer pomiaru i	Numer pierścienia k	Wskazania mikrometru		$r_k = \frac{l-p}{2}$ [10 ⁻³ m]	r_k^2 [10 ⁻⁶ m]	λ [10 ⁻⁶ m]	R_i [m]	$\dot{R} \pm S_{\dot{R}}$ [m]	$R \pm \sigma_R$ [m] Metoda regresji liniowej
		Na lewo l [10 ⁻³ m]	Na prawo p [10 ⁻³ m]						
1	6								
2	7								
.....								
	17								

VII. Opracowanie ćwiczenia

1. Obliczamy wartości $r_k = \frac{l-p}{2}$ i r_k^2 , wpisujemy je do odpowiednich kolumn tabeli pomiarowej.
2. Na podstawie danych pomiarowych sporządzamy na papierze milimetrycznym wykres $r_k^2=f(k)$. Zaznaczamy na wykresie niepewności Δ), które wyznaczamy z zależności $\Delta(r_k^2) = 2r_k\Delta r_k$,

- a. gdzie Δr_k to niepewność pomiaru promienia r_k oszacowana jako maksymalna niepewność systematyczna (na podstawie trzykrotnego pomiaru promienia dla wybranego pierścienia).

3. Wyznaczenie promienia krzywizny R soczewki

3.1 Metoda I

- Znając promień k – tego prążka Newtona i długość fali możemy obliczyć promień krzywizny R soczewki płasko – wypukłej odpowiednio przekształcając wzór (11) i uwzględniając długość fali światła stosowanej w ćwiczeniu lampy sodowej $\lambda = 0,589 \cdot 10^{-6} m$. Otrzymane wartości R wpisujemy do tabeli.
- Obliczamy średnią wartość \bar{R} promienia krzywizny soczewki oraz odchylenie standardowe $S_{\bar{R}}$ wartości średniej \bar{R} dla serii pomiarów. Obliczamy również standardową niepewność pomiarową pojedynczego pomiaru S_R :

$$S_{\bar{R}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})^2} \quad (12a)$$

$$S_R = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})^2} \quad (12b)$$

gdzie n - liczba punktów pomiarowych.

- Zaokrąglamy wartości \bar{R} i $S_{\bar{R}}$ (zgodnie z normami) i wpisujemy do Tabeli ostateczny wynik.
- Obliczamy błąd względny.

3.2 Metoda II

Zależność (11) można sprowadzić do postaci równania liniowego $y = ax + b$ gdzie $y = r_k^2$, $x=k$ jest numerem pierścienia, b powinno być zero.

Wówczas współczynnik kierunkowy prostej będzie równy $a = R\lambda$. Znajdując współczynnik nachylenia prostej metodą analityczną- najmniejszych kwadratów lub metodą graficzną, możemy obliczyć promień krzywizny $R = \frac{a}{\lambda}$.

- Metoda najmniejszych kwadratów

Parametry prostej $y = ax + b$ wyznaczamy ze wzorów:

$$a = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}; \quad b = \bar{y} - a\bar{x} \quad (13)$$

gdzie:

$$\overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i; \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (14)$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

n - liczba punktów pomiarowych.

- Ocena niepewności pomiaru

Błąd standardowy σ_a obliczamy wg wzoru:

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{1}{n-2} \left(\frac{\overline{y^2} - a\overline{xy} - b\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \right)} \quad (15)$$

gdzie $\overline{y^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2$.

Błąd standardowy σ_b obliczamy wg wzoru:

$$\sigma_b = \sigma_a \sqrt{\overline{x^2}} \quad (16)$$

Równanie $y = a x + b$ nazywamy równaniem regresji liniowej wielkości Y względem wielkości X. Miarą tego, jak silna jest badana współzależność wielkości Y i X, jest współczynnik korelacji liniowej:

$$r = \frac{\overline{x'y} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sqrt{(\overline{x^2} - (\overline{x})^2) \cdot (\overline{y^2} - (\overline{y})^2)}} \quad (17)$$

Współczynnik korelacji zawiera się w przedziale $-1 < r < 1$, przy czym korelacja jest tym silniejsza, im większą wartość osiąga $|r|$.

- Korzystając ze wzorów (13-17) obliczamy parametr a i jego niepewność standardową oraz współczynnik korelacji. Prawidłowość obliczeń możemy sprawdzić porównując wyniki otrzymane metodą analityczną z wynikami uzyskanymi z programu komputerowego „Regresja”, znajdującego się w Pracowni.
- Następnie przeprowadzamy zaokrąglenie wartości parametru a i σ_a zgodnie z obowiązującymi normami i obliczamy wartość R ze wzoru $R = \frac{a}{\lambda}$

- Obliczamy błąd standardowy σ_R

$$\sigma_R = \left| \frac{\partial R}{\partial a} \right| \sigma_a = \frac{1}{\lambda} \sigma_a = \frac{a}{\lambda} \frac{\sigma_a}{a} \quad (18)$$

Ostatecznie

$$\sigma_R = R \frac{\sigma_a}{a}$$

- Zaokrąglamy wartości R i σ_R (zgodnie z normami) i wpisujemy do Tabeli ostateczny wynik. Obliczamy błąd względny.
- Jeśli $b \neq 0$, skomentować ten fakt.

3.3 Metoda graficzna

Metoda opisana jest w rozdziale X.

- Obliczamy współczynnik nachylenia prostej a i porównujemy jego wartość z wartością otrzymaną metodą najmniejszych kwadratów.

- Obliczamy wartość R ze wzoru $R = \frac{a}{\lambda}$

4. Zestawiamy wartości promienia krzywizny soczewki R obliczone różnymi metodami.

IX. Literatura

1. J. M. Massalscy „Fizyka dla inżynierów” cz. I, Wydawnictwa Naukowo – Techniczne WNT, Warszawa 2005r.
2. D. Halliday, R. Resnick, „Fizyka” t. 2, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa
1. B. Jaworski, A. Dietlaf „Kurs fizyki” t. 3
2. T. Dryński "Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki", Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1976r.
3. H. Szydłowski – Pracownia fizyczna wspomaganą komputerem, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2003r.
4. J. Lech – Opracowanie wyników pomiarów w laboratorium podstaw fizyki, Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, Wydział Inżynierii Procesowej, Materiałowej i Fizyki Stosowanej, Częstochowa 2005r.

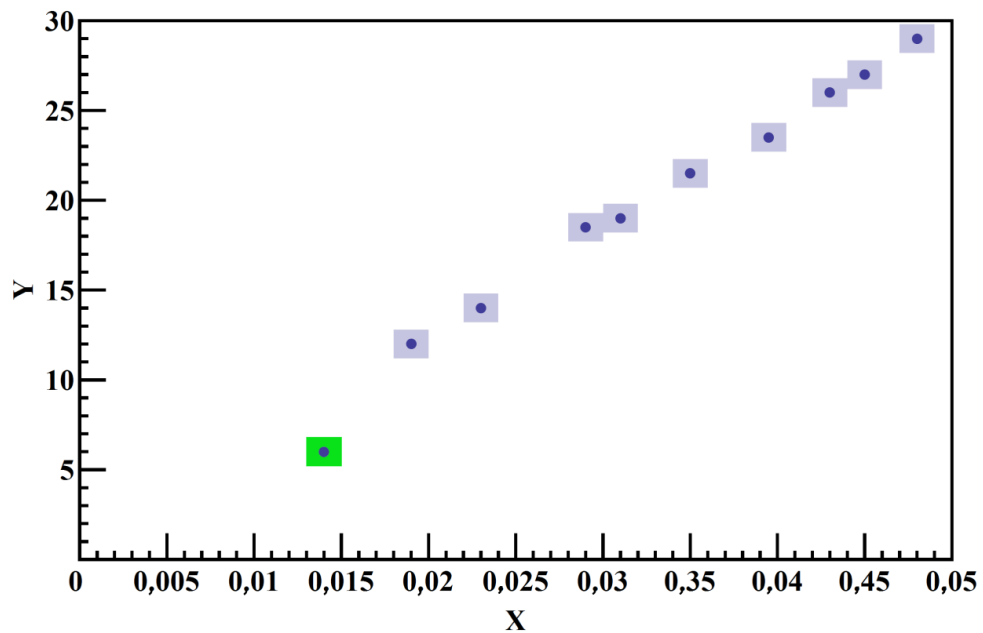
X. Dopasowanie prostej do wyników pomiarów.

Jeżeli badana zależność jest liniowa lub otrzymany wykres sugeruje taką zależność, to jej przebieg powinien mieć zapis: $y = ax + b$.

W jaki sposób uzyskać wartości parametrów a i b prostej jak najlepiej dopasowanej do zbioru n punktów doświadczalnych $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$?

1. Na wykresie nanosimy wszystkie punkty pomiarowe oraz ich niepewności (Rys.5).

Jeżeli któryś z punktów pomiarowych znacznie odbiega od przebiegu linii, wzdłuż której układają się pozostałe punkty, to w dalszej analizie należy go odrzucić jako błąd grubo. Na rys.5 jest to prostokąt oznaczony kolorem zielonym.

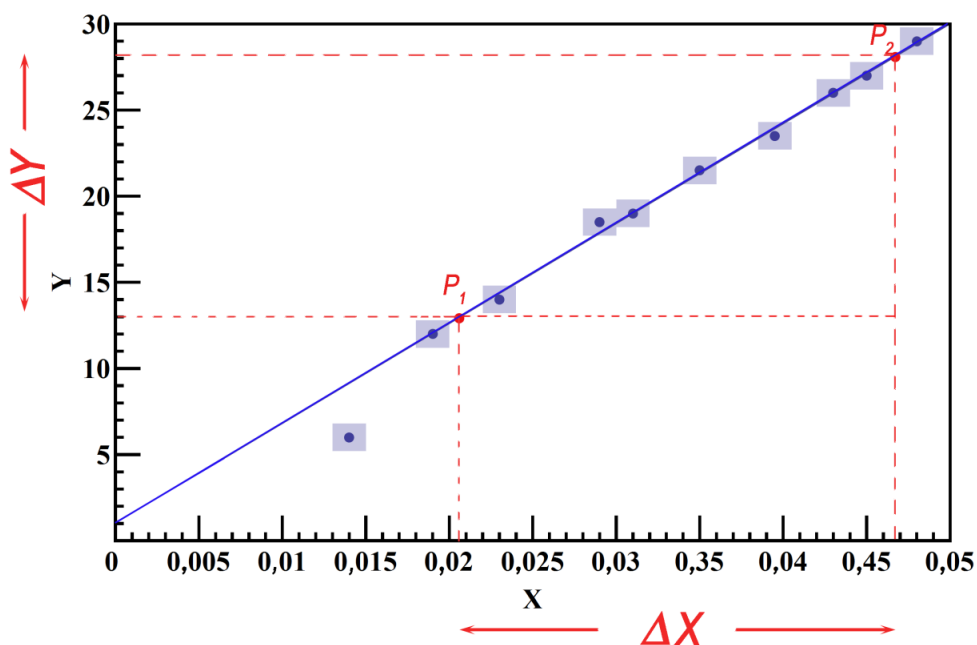


Rys.5

2. Jeżeli punkty układają się wzdłuż linii prostej, to linię tak prowadzimy, aby przechodziła przynajmniej przez 70% prostokątów i suma odległości współrzędnych punktów pomiarowych od tej linii była po obu stronach mniej więcej taka sama (rys.6).

Określamy **szeroki** przedział wartości argumentu ΔX i odpowiadający temu przyrost wartości zmiennej zależnej (wartości funkcji) ΔY - wybieramy dwa punkty P_1 i P_2 (zaznaczone na rys.6 kolorem czerwonym) i odczytujemy odpowiednie wartości ich współrzędnych (x_1, y_1) oraz (x_2, y_2) .

Obliczamy różnice $\Delta X = x_2 - x_1$ i $\Delta Y = y_2 - y_1$.



Rys.6

3. Współczynnik nachylenia a jest stosunkiem przyprostokątnych ΔY i ΔX trójkąta, którego przeciwprostokątna jest częścią poprowadzonej graficznie prostej (rys. 6).

Współczynnik kierunkowy tak narysowanej prostej jest równy:

$$a = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \quad (17)$$

Współczynnik b jest miejscem przecięcia prostej z osią Y. W przypadkach, gdy z wykresu nie można bezpośrednio odczytać wartości Y dla $X=0$ (czyli parametru b), wykorzystujemy równanie prostej $y = a x + b$, do którego podstawiamy np. współrzędne punktu $P_1 (x_1, y_1)$ i obliczony wcześniej parametr a .

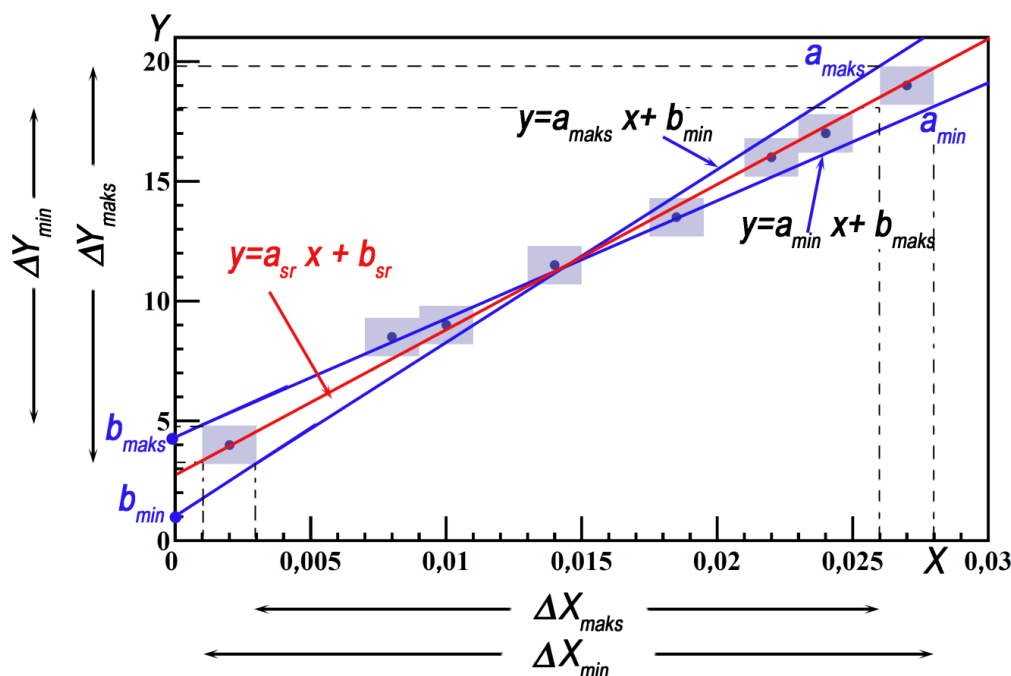
UWAGA: W wykresach wielkości fizycznych nie można utożsamiać współczynnika nachylenia z tangensem kąta nachylenia prostej do osi X. W wykresach wielkości fizycznych kąt nachylenia prostej może być różny dla tych samych danych pomiarowych – w zależności od tego, jakie podziałki zastosujemy na osiach wykresu. Jednoznacznie określoną wielkością pozostaje współczynnik nachylenia a określony wzorem (17).

W przeciwieństwie do bezwymiarowego tangensa, nachylenie a posiada wymiar, będący stosunkiem wymiarów wielkości Y i X.

Gdy punkty pomiarowe tworzą idealnie linię prostą, wtedy dokładność obliczenia współczynnika a wynika wyłącznie z dokładności odczytu wartości y i x na wykresie.

W rzeczywistych pomiarach fizycznych błędy pomiarowe wielkości X i Y sprawiają, że punkty doświadczalne rzadko tworzą idealną prostą. Wówczas wybieramy dwa końcowe punkty pomiarowe i prowadzimy dwie proste: o największym (a_{maks}) i najmniejszym (a_{min}) kącie nachylenia. Proste te powinny przechodzić przez przeciwległe wierzchołki skrajnych prostokątów niepewności, tak jak pokazano poniżej na rys.7.

Na osi Y proste wyznaczają dwa punkty przecięcia, wyznaczające b_{min} i b_{maks} .



Rys.7

Możemy przyjąć, że :

$$a_{min} = \frac{\Delta Y_{min}}{\Delta X_{min}} \quad \text{i} \quad a_{maks} = \frac{\Delta Y_{maks}}{\Delta X_{maks}}$$
$$|\Delta a| = \frac{1}{2} |a_{maks} - a_{min}|$$

$$a_{sr} = \frac{1}{2} (a_{maks} + a_{min})$$

oraz

$$|\Delta b| = \frac{1}{2} |b_{maks} - b_{min}|$$

$$b_{sr} = \frac{1}{2} (b_{maks} + b_{min})$$

Kolorem czerwonym na rys.7 zaznaczono prostą najlepszego dopasowania $y = a_{sr}x + b_{sr}$, otrzymaną metodą graficzną .