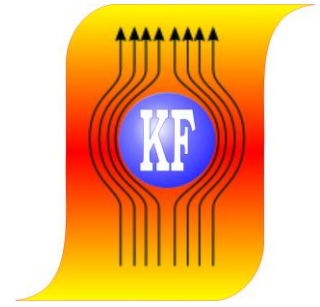
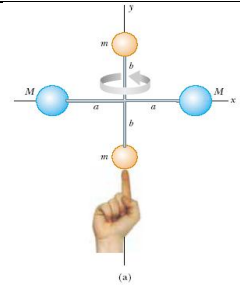


KATEDRA FIZYKI

**WYDZIAŁ INŻYNIERII PRODUKCJI
I TECHNOLOGII MATERIAŁÓW
POLITECHNIKA CZĘSTOCHOWSKA**



**PRACOWNIA
MECHANIKI**



ĆWICZENIE NR M-6

**WYZNACZANIE MODUŁU SZTYWNOŚCI DRUTU
ZA POMOCĄ WAHADŁA TORSYJNEGO**

I. Zagadnienia do przestudiowania

1. Odkształcanie ciał stałych.
2. Zależności pomiędzy odkształceniami a naprężeniami.
3. Wahadło torsyjne.
4. Metody wyznaczania modułu Younga i modułu sztywności na skręcanie.
5. Rachunek błędów metodą Gaussa i metodą różniczki zupełnej.

II. Wprowadzenie teoretyczne

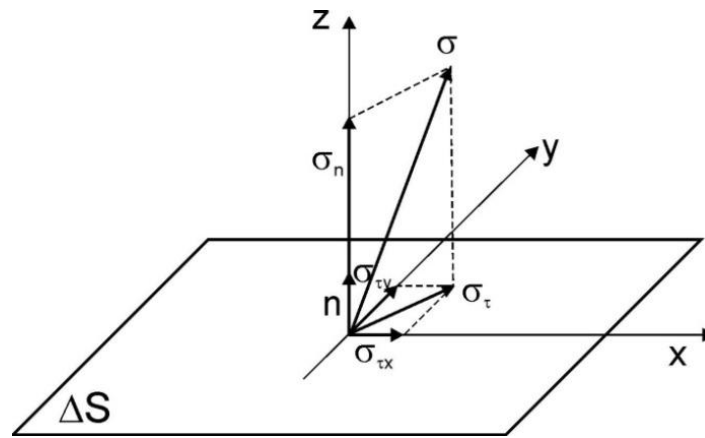
1. Odkształcenia i naprężenia w ciałach stałych

Ciała stałe, pod działaniem sił zewnętrznych, mogą ulegać nie tylko przemieszczeniu, ale również odkształceniu. Pod pojęciem odkształcenia rozumie się chwilową lub trwałą zmianę kształtu lub(i) objętości ciała jako całości albo jego dowolnych części. Stopień odkształcenia ciała zależy od wielkości użytych sił zewnętrznych i własności mechanicznych ciał charakteryzowanych przez siły wewnętrzne. Zarówno jedne, jak i drugie siły przyjęto w teorii sprężystości odnosić do jednostki powierzchni, na jaką działają, i określać pojęciem naprężenia. Naprężenie σ można więc wyrazić poprzez działające siły $\Delta \mathbf{F}$ na element powierzchni $\Delta \mathbf{S}$ jako

$$\sigma = \lim_{\Delta \mathbf{S} \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta \mathbf{S}} = \frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{S}} \quad (1)$$

W ogólnym przypadku wektor naprężenia może być zorientowany dowolnie w stosunku do wybranej powierzchni $\Delta \mathbf{S}$ (rys. 1). Rozkłada się go wówczas na składową prostopadłą do powierzchni skierowaną wzdłuż wektora \mathbf{n} (naprężenie normalne σ_n) i składową styczną (naprężenie ścinające σ_τ). Składowa normalna, w zależności od zwrotu wektora σ , może być ciągnieniem (naprężenie dodatnie) lub ciśnieniem (naprężenie ujemne). Naprężenie ścinające σ_τ może być rozłożone na powierzchni $\Delta \mathbf{S}$ ma kolejne dwie składowe $\sigma_{\tau x}$ i $\sigma_{\tau y}$ wzdłuż wzajemnie prostopadłych kierunków scharakteryzowanych wektorami wzdłuż osi x i y . W ogólnym przypadku naprężenia w ciele stałym charakteryzowane są poprzez tensor naprężeń, którego składowe tworzą macierz

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (2)$$



Rys. 1. Orientacja wektora naprężeń σ w stosunku do powierzchni ΔS w układzie współrzędnych kartezjańskich

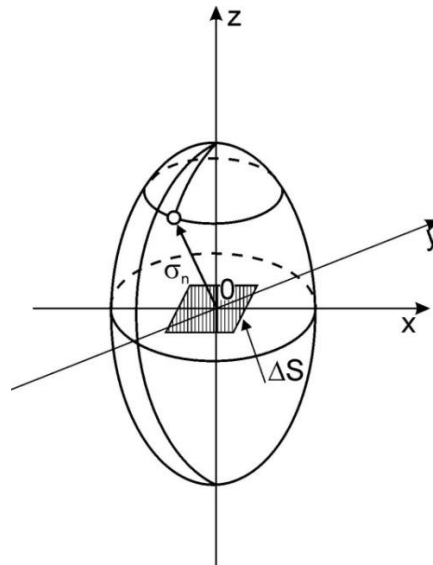
Tensor (2) jest tensorem symetrycznym ($\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ itd.), ma więc tylko sześć różnych wartości składowych, potrzebnych do opisu naprężeń w odkształcanym, w dowolny sposób, ciele stałym. Tensor ten będzie się zmieniał od punktu do punktu w objętości ciała stałego. Aby opisać naprężenia w całej objętości ciała, trzeba podać wartość każdej z sześciu składowych w funkcji położenia x, y, z . Tensor naprężeń tworzy więc pole, które przyporządkowuje każdemu punktowi przestrzeni sześć wartości σ_{ij} . Jest to tzw. pole tensorowe, w odróżnieniu od pola wektorowego, które każdemu punktowi przestrzeni przyporządkowuje wektor (trzy składowe) oraz od pola skalarnego, w którym każdy punkt charakteryzowany jest przez jedną liczbę (np. temperaturę).

Szczegółowy opis matematyczny naprężeń i odkształceń oraz zależności między nimi są dosyć obszernie i wymagają znajomości rachunku tensorowego. Można go częściowo znaleźć w podręcznikach akademickich z fizyki lub w pełniejszym zakresie, w monografiach dotyczących teorii opisujących wytrzymałość materiałów. Ze względu na stosunkowo niewielką objętość niniejszego wstępu konieczne jest ograniczenie go do fizycznych podstaw teorii sprężystości. Aparat matematyczny zostanie przy tym wykorzystany w minimalnym wymiarze.

Przyswojenie podstawowych pojęć teorii sprężystości może ułatwić geometryczne przedstawienie zagadnienia naprężeń i odkształceń. Jeżeli naprężenia normalne działające na dowolny element płaszczyzny ΔS z otoczenia wybranego punktu O , znajdującego się w objętości rozpatrywanego ciała stałego, mają ten sam znak (są albo ciśnieniem, albo ciągnięciem), mogą być przedstawione w postaci geometrycznej konstrukcji zwanej elipsoidą naprężeń (dla naprężeń o różnych znakach może być konstruowana hiperboloida) (rys. 2). W przypadku konstrukcji Lamégo środek elipsoidy umieszczony jest w punkcie O , a jej osie mają kierunki naprężeń głównych, tzn. prostopadłych do elementów powierzchni, na których nie występują naprężenia styczne. Wektor poprowadzony z punktu O do dowolnego punktu powierzchni elipsoidy, w odpowiedniej skali, odpowiada wektorowi naprężenia

działającego na płaszczyznę ΔS z otoczenia punktu O, w kierunku prostopadłym do tej płaszczyzny. W przypadku ciał izotropowych elipsoida przechodzi w kulę.

W technice zazwyczaj jest stosowane naprężenie efektywne odnoszące się do przekroju początkowego, w odróżnieniu od naprężenia rzeczywistego, które powinno być obliczane w stosunku do przekroju rzeczywistego, jeśli ten zmienia się w trakcie odkształcania ciała. Miarą naprężeń w układzie SI jest *paskal* ($1 \text{ Pa} = 1 \text{ N}\cdot\text{m}^{-2}$). Do praktycznych zastosowań jednostka ta jest zbyt mała, dlatego zwykle używa się jej wielokrotności, np. *megapaskala* ($1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ Pa}$).



Rys. 2. Elipsoida naprężeń w układzie współrzędnych kartezjańskich

Skutkiem występowania omówionych powyżej naprężeń w ciałach stałych jest deformacja struktury, charakteryzowana w teorii opisującej wytrzymałość materiałów jako odkształcenie. Odkształcenia ze względu na trwałość deformacji struktury można podzielić na sprężyste i plastyczne. Odkształcenia sprężyste występują wtedy, gdy po usunięciu naprężenia deformacja maleje do zera. Odkształcenia te powstają w wyniku przyłożenia stosunkowo małego naprężenia, które powoduje jedynie niewielkie przesunięcia atomów w sieci z ich położenia równowagi w obrębie tego samego dołu potencjału, tak że po ustąpieniu działania siły zewnętrznej wywołującej naprężenie atomy wracają do położenia wyjściowego. Przy większych naprężeniach występują trwałe odkształcenia plastyczne. Podczas odkształcenia plastycznego atomy przekraczają bariery potencjału i po ustąpieniu działania siły zewnętrznej znajdują się w innych dołach potencjału niż były uprzednio.

Przyjmując za kryterium podziału charakter deformacji w zakresie odkształceń sprężystych można wyróżnić odkształcenia objętościowe, polegające na zmianie objętości bez zmiany kształtu, odkształcenia postaci bez zmiany objętości oraz odkształcenia objętościowo-postaciowe, w których deformacji ulega jednocześnie objętość i kształt. Odkształcenia, podobnie jak naprężenia, mogą być opisywane poprzez symetryczny tensor odkształcenia, którego składowe tworzą macierz analogiczną do tensora naprężeń (2). Reprezentacją geometryczną tensora odkształceń jest elipsoida odkształceń.

Przy opisie odkształceń i naprężeń celowym jest wspomnieć również o zasadzie superpozycji. W myśl tej zasady, jeśli w wyniku działania pewnych sił zewnętrznych powstają określone naprężenia i odpowiadające im odkształcenia, a w wyniku działania innych sił powstają dodatkowe odkształcenia tego samego typu, to odkształcenie wypadkowe będzie sumą odkształceń, które wystąpiłyby, gdyby siły powodujące je działały od siebie niezależnie.

2. Zależności między odkształceniami a naprężeniami

Odkształcenia uwarunkowane są odpowiednimi własnościami fizycznymi materiału, które z kolei zależą od jego struktury. Naprężenia zależą od wzajemnego położenia atomów w sieci ciała poddanego działaniu sił zewnętrznych. Tak więc odkształcenia i naprężenia zależą od struktury krystalicznej ciała stałego i mogą być powiązane między sobą pewnymi zależnościami funkcyjnymi. Charakter funkcji zależy od wielkości naprężeń oraz odpowiadających im odkształceń i określa się go na podstawie wyników prób wytrzymałościowych. Przebieg uzyskanej w próbie wytrzymałościowej zależności funkcyjnej pozwala wyodrębnić przedziały, w których odkształcenia mogą być opisane jednolitą funkcją z naprężeniem jako zmienną niezależną. Omówienie wszystkich przedziałów odnosi się do teorii wytrzymałości materiałów w szerokim ujęciu i wychodzi poza zakres tematyczny danego ćwiczenia. Tu zostanie ono ograniczone do zakresu odkształceń sprężystych, a w szczególności do przedziału liniowej proporcjonalności funkcji $\varepsilon = f(\sigma)$. Przedział liniowej proporcjonalności pokrywa się praktycznie z zakresem sprężystości, chociaż dla pewnych ciał można wyodrębnić jeszcze niewielki zakres odkształceń sprężystych w pobliżu dolnej granicy plastyczności, w którym obserwowane są odchylenia od liniowej zależności pomiędzy odkształceniem a naprężeniem. W przedziale proporcjonalności zależność między odkształceniem a naprężeniem ujmuje prawo Hooke'a, w myśl którego, w ogólnym przypadku ciał anizotropowych, składowe tensora odkształceń są liniowymi jednorodnymi funkcjami składowych tensora naprężeń. Można to matematycznie zapisać jako

$$\varepsilon_k = \sum_{i=1}^6 c_{ik} \sigma_i \quad (3)$$

gdzie ε_k jest zwykle odkształceniem względnym, natomiast współczynniki c_{ik} są tzw. uogólnionymi modułami sprężystości. Ilość współczynników c_{ik} (od 3 do 21, uwzględniając warunek $c_{ik} = c_{ki}$) zależy od symetrii struktury odkształcanego ciała. Dla prostszego przypadku ciał izotropowych prawo Hooke'a może być zapisane jako $\varepsilon = c\sigma$. W zależności od rodzaju odkształcenia c jest zwykle zastępowane przez odwrotność współczynnika odpowiadającego danemu odkształceniu. Dla odkształceń objętościowych, w których zmiana naprężenia jest proporcjonalna do naprężeń wynikających np. z ciśnienia wywieranego przez ciecz, w której odkształcane ciało się znajduje, współczynnik c jest definiowany jako odwrotność modułu ściśliwości K . Natomiast w przypadku odkształceń objętościowo-

postaciowych, których przykładem może być jednostronne rozciąganie lub ściskanie ciała, rolę współczynnika proporcjonalności spełnia odwrotność modułu sprężystości podłużnej E , znanego też jako moduł Younga. Przyłożenie siły zewnętrznej w określonym kierunku, powodującej wydłużenie Δl ciała, prowadzi do równoczesnego jego zwężenia Δd w kierunku prostopadłym do działającej siły. Zwężenie względne $\frac{\Delta d}{d}$ jest proporcjonalne do wydłużenia względnego $\frac{\Delta l}{l}$, a współczynnikiem proporcjonalności jest stała Poissona ν . Matematycznie można to ująć jako $\frac{\Delta d}{d} = -\nu \frac{\Delta l}{l}$. Wartość stałej Poissona jest zazwyczaj dodatnia i mniejsza od 0,5.

W przypadku ściskania obserwowane jest skrócenie ciała oraz rozszerzenie przekroju poprzecznego. Zależność między modułem ściśliwości K a modułem Younga E i współczynnikiem Poissona ν wyrażana jest jako

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (4)$$

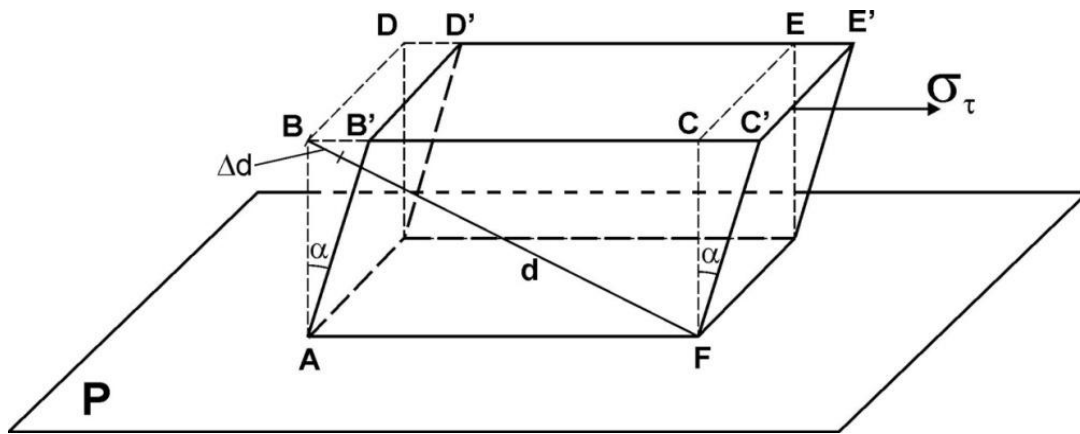
W przypadku odkształceń postaci, które powstają w wyniku działania naprężeń ścinających, współczynnik proporcjonalności c określany jest jako odwrotność modułu sztywności G . Wyznaczanie modułu sztywności G jest celem tego ćwiczenia, w związku z czym zostanie on omówiony szerzej.

3. Moduł sztywności

Moduł sztywności G nazywany jest również modułem (lub współczynnikiem) sprężystości postaciowej lub poprzecznej, a także współczynnikiem ścinania lub skręcania. Odkształcenia charakteryzowane przez moduł sztywności G rozpatruje się zazwyczaj na przykładzie prostopadłościanu poddawanego naprężeniom ścinającym lub pręta skręcanego wzdłuż osi podłużnej. Rozpatrzmy pokrótce odkształcanie prostopadłościanu, a następnie skręcanie pręta.

Przyłożenie naprężenia ścinającego σ_τ do górnej ściany prostopadłościanu, którego dolna ściana przytwierdzona jest do podstawy, prowadzi do odkształcenia postaci opisywanego przez zmianę przekątnych Δd ścian bocznych lub, częściej, przez kąt α , o jaki prostopadłościan zostanie skręcony (rys. 3). Naprężenie ścinające σ_τ jest tu określane jako stosunek przyłożonej siły zewnętrznej do powierzchni ściany górnej BCDE. Odkształcenie polega w tym przypadku na przesuwaniu się względem siebie poziomych warstw prostopadłościanu. Zgodnie z prawem Hooke'a zależność pomiędzy naprężeniem a odkształceniem dla jednorodnego prostopadłościanu o izotropowej strukturze można zapisać jako

$$\sigma_\tau = G \alpha \quad (5)$$



Rys. 3. Odształcenie prostopadłościanu wywołane naprężeniem ścinającym σ_τ

Podobnie jak w przypadku prostopadłościanu, odkształcenie pręta o długości l i przekroju kołowym o promieniu R , poddanego skręcaniu za pomocą siły zewnętrznej F , polega na przesuwaniu się względem siebie poziomych warstw (przekrojów prostopadłych do osi) pręta, przy czym przesunięcie jest tu proporcjonalne do odległości danej warstwy od nieruchomo zamontowanej górnej jego części. Odształcenie opisywane jest poprzez kąt α , a jego wielkość zależy od własności mechanicznych pręta i momentu siły powodującej skręcenie. Dla znalezienia zależności pomiędzy tymi wartościami rozpatrzmy pręt przedstawiony na rysunku 4.

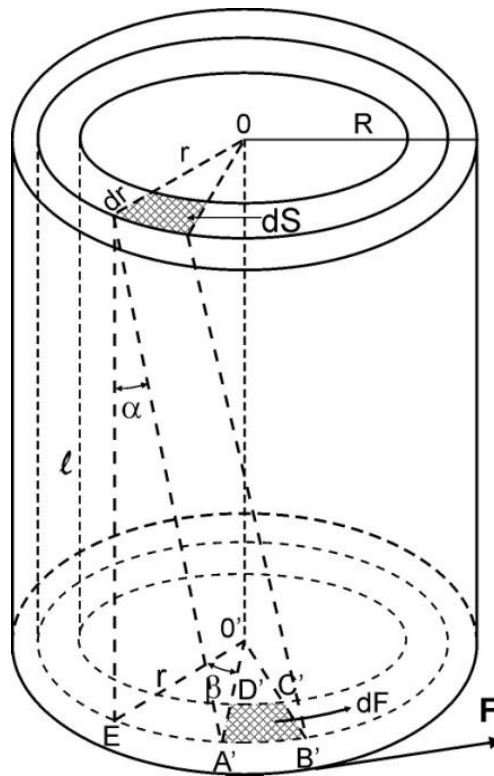
Długość łuku EA' może być z jednej strony określona jako $EA' = l \operatorname{tg} \alpha$, a z drugiej jako $EA' = r\beta$, czyli

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r\beta}{l} \quad (6)$$

gdzie β jest kątem skręcenia mierzonym na dolnej powierzchni przekroju poprzecznego pręta.

Przy rozpatrywaniu długiego pręta o małej średnicy z równania (6) wynika, że wartość kąta α jest mała nawet dla znacznych wartości β i można przyjąć z dobrym przybliżeniem, że $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$. Wyrażenie (6) można więc zapisać

$$\alpha = \frac{r\beta}{l} \quad (7)$$



Rys. 4. Odształcenie pręta poddanego skręceniu przy użyciu zewnętrznej siły F

Jeżeli przyjąć, że na element powierzchni dS ($A'B'C'D'$) przypada siła o wartości dF , to naprężenie ścinające σ_τ będzie równe

$$\sigma_\tau = \frac{dF}{dS} \quad (8)$$

Na podstawie prawa Hooke'a (5) oraz powyższego wyrażenia można zapisać, że

$$dF = G \alpha dS \quad (9)$$

Z kolei moment siły działający na element dS jest równy

$$dN = dF r = G \alpha r dS \quad (10)$$

Moment ΔN określony jako suma elementarnych momentów dN po pełnym obwodzie wydzielonego z pręta cylindra, którego powierzchnia przekroju dS jest równa $dS = 2\pi r dr$, w oparciu o wyrażenia (7) i (10) może być zapisany jako

$$\Delta N = 2\pi G \beta \frac{r^3 dr}{l} \quad (11)$$

Pełny pręt składa się z ciągu takich współśrodkowych cylindrów, z których każdy skręcony jest o kąt α . Dla pełnego pręta całkowity moment siły N powodującej jego odkształcenie będzie więc równy

$$N = 2\pi G \frac{\beta}{l} \int_0^R r^3 dr = \pi G \frac{R^4}{2l} \beta = D\beta \quad (12)$$

gdzie D jest tzw. momentem kierującym. Z powyższego wzoru wynika, że moment siły jest proporcjonalny do kąta skręcenia i do czwartej potęgi promienia, czyli 2 razy grubszy pręt jest 16 razy bardziej „sztywny” na skręcanie. Zależność pomiędzy modułem G a modułem Younga E i stałą Poissona ν wyraża wzór

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (13)$$

Znajomość wartości G może być pomocna przy konstruowaniu wałów napędowych w różnego rodzaju maszynach oraz mechanizmów pomiarowych precyzyjnych mierników. Jednostką współczynnika G w układzie SI jest N/m^2 , czyli *paskal*, podobnie jak w przypadku naprężeń. Mierząc kąt skręcenia β i moment siły zewnętrznej, powodującej odkształcenie pręta o konkretnych wymiarach, można na podstawie wzoru (12) określić wartość modułu G . Jest to tzw. metoda statyczna. Nieco kłopotliwy w tej metodzie jest pomiar wartości siły zewnętrznej, co nie jest konieczne w przypadku metody dynamicznej.

III. Zasada pomiaru w odniesieniu do dynamicznej metody wyznaczania modułu sztywności

Do wyznaczania modułu G metodą dynamiczną wykorzystywane jest wahadło torsyjne. Ruch drgający wahadła torsyjnego odbywa się pod wpływem sił posiadających względem osi skręcania moment wypadkowy, dążący do przywrócenia ciała stanu równowagi. Ponieważ wartość momentu jest proporcjonalna do kąta skręcenia, drgania torsyjne mogą być opisane w sposób podobny do drgań harmonicznym, przy czym równanie ruchu należy opisać w oparciu o drugą zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego, a nie postępowego jak dla typowych drgań harmonicznym po linii prostej. Jeżeli I_0 jest momentem bezwładności względem osi OO' , to zgodnie z wyrażeniem (12) drgania torsyjne można opisać równaniem

$$I_0 \frac{d^2\beta}{dt^2} = -D\beta \quad (14)$$

Znak „-” we wzorze (14) wynika z równowagi momentu skręcającego wywołanego siłami zewnętrznymi i przeciwnie skierowanego momentu wywołanego naprężeniami wewnętrznymi. Analogicznie jak w przypadku drgań harmonicznym, rozwiązanie równania (14) można zadać w postaci

$$\beta = \beta_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad (15)$$

gdzie β_0 oznacza amplitudę drgań, ω - prędkość kątową i φ - fazę początkową ruchu, którą przy odpowiednim doborze chwili początkowej pomiaru czasu t można przyjąć równą zero. Obliczając drugie pochodne z wyrażenia (15) i wraz z tym wyrażeniem wstawiając je do równania (14) oraz zastępując prędkość kątową przez okres drgań T ($\omega = \frac{2\pi}{T}$), po prostych przekształceniach otrzymamy

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{D}} \quad (16)$$

Należy podkreślić, że zależność (16) jest słuszna dla odkształcenia nieprzekraczającego granicy proporcjonalności, zdefiniowanej w prawie Hooke'a. W tym zakresie drgania są izochroniczne, niezależnie od ich amplitudy.

Klasyczne wahadło torsyjne stanowi drut sprężysty, którego jeden koniec zamocowany jest w nieruchomym uchwycie, a na drugim końcu zawieszono jest ciało, zazwyczaj w postaci bryły o regularnych kształtach, umożliwiającym łatwe określenie momentu bezwładności I_0 . Moment kierujący D takiego wahadła, na podstawie wyrażenia (12), jest równy

$$D = \frac{\pi R^4 G}{2l} \quad (17)$$

W niniejszym ćwiczeniu drgania torsyjne wykonuje wibrator osadzony pomiędzy dwoma napiętymi drutami. Jest to więc pewnego rodzaju „dwustronne wahadło torsyjne”. Moment kierujący, pochodzący od dwóch drutów o tych samych własnościach mechanicznych, długościach l_1 , l_2 i średnicach $2R_1$ i $2R_2$, może być określony jako suma momentów kierujących od obydwu drutów ($D = D_1 + D_2$) i w oparciu o wzór (17) zapisany jako

$$D = \frac{\pi G}{2l_1 l_2} (R_1^4 l_2 + R_2^4 l_1) \quad (18)$$

Ze wzoru (18) można wyznaczyć moduł sztywności G , jeśli zostanie określona wartość D . Znając moment bezwładności wibratora I_0 i mierząc okres drgań T , można wartość D wyliczyć bezpośrednio ze wzoru (16). W przypadku wahadła z niniejszego ćwiczenia wibrator składa się z ramy o momencie bezwładności I_{or} i dwóch krążków o momentach bezwładności I_{ok} względem osi OO przechodzącej przez środek mas ramy i krążków. Wypadkowy moment bezwładności względem osi OO można oznaczyć jako $I_0 = I_{or} + 2I_{ok}$, którego wartość nie jest znana. Odległość krążków od osi obrotu można zmieniać. Dla odległości r od osi obrotu i masy m każdego z krążków całkowity moment bezwładności, określony na podstawie twierdzenia Steinera, wynosi

$$I = I_0 + 2mr^2 \quad (19)$$

Po uwzględnieniu równania (19) wzór (16) przyjmuje postać

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + 2mr^2}{D}} \quad (20)$$

Aby wyeliminować nieznaną wartość I_0 i obliczyć D , należy zmierzyć okres T dla dwóch położań krążków, tzn. T_1 dla r_1 i T_2 dla r_2 . Otrzymamy układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi, rozwiązanie którego względem D prowadzi do wyrażenia

$$D = 8\pi^2 m \frac{r_2^2 - r_1^2}{T_2^2 - T_1^2} \quad \text{dla } r_2 > r_1 \quad (21)$$

Przyrównując wzory (18) i (21) oraz przyjmując $R_1 = R_2 = R$, otrzymamy wyrażenie na moduł sztywności, które w ogólnej postaci można zapisać jako

$$G_{ij} = \frac{16\pi m l_1 l_2}{R^4 (l_1 + l_2)} \cdot \frac{r_j^2 - r_i^2}{T_j^2 - T_i^2} \quad (22)$$

Pierwszy człon wyrażenia (22) zawiera parametry konkretnego układu pomiarowego i można go traktować jako stałą aparaturową

$$A = \frac{16\pi m l_1 l_2}{R^4 (l_1 + l_2)} \quad (23)$$

Równanie (22) można wówczas zapisać w uproszczonej postaci jako

$$G_{ij} = A \cdot \frac{r_j^2 - r_i^2}{T_j^2 - T_i^2} \quad (24)$$

Dla wartości $l_1 = 0,174$ m, $l_2 = 0,190$ m, $R = 0,4 \cdot 10^{-3}$ m i $m = 0,190$ kg, charakteryzujących dany układ, stała $A = 3,4 \cdot 10^{13}$ kg · m⁻³.

IV. Zestaw pomiarowy

Dwustronne wahadło torsyjne wyposażone w układ pozwalający na zliczanie liczby drgań oraz czasu ich trwania.

V. Przebieg ćwiczenia

1. Ustawić krążki w pozycji maksymalnie zsuniętej (środek masy w odległości $r_1 = 2$ cm od osi obrotu).
2. Sprawdzić, czy ustawienie wahadła w położeniu równowagi odpowiada zeru na skali kątowej i przeprowadzić, w razie potrzeby, korektę.
3. Włączyć przyrząd do sieci i wcisnąć przycisk **СЕТЬ** (SIEĆ).
4. Wychylić wahadło o kąt około 10° z położenia równowagi i zmierzyć czas 10 pełnych drgań. Układ pokazuje liczbę i czas trwania pełnych okresów. Aby odliczanie zostało przerwane automatycznie po 10 drganiach, należy wcisnąć przycisk STOP w momencie wyświetlenia cyfry 9 na liczniku drgań.
5. Odczytać wskazania milisekundomierza, obliczyć okres T_1 i wyniki wpisać do tabeli.
6. Wyzerować przyrząd, wciskając przycisk **СБРОС**.
7. Pomiary powtórzyć 10-krotnie dla tego samego ustawienia krążków, za każdym razem odchylając wahadło od położenia równowagi o kąt około 10° .
8. Ustawić krążki na odległość ich środka masy od osi obrotu równą $r_2 = 6$ cm.

UWAGA: *Należy czynność tę wykonywać ostrożnie, aby nie uszkodzić drutu stalowego wahadła, na którym jest ono zawieszona.*

9. Powtórzyć czynności od punktu 4 do 7 dla pomiaru okresu T_2 .
10. Analogiczne pomiary okresu T_3 wykonać dla przypadku $r_3 = 9$ cm.

VI. Tabela pomiarowa

L.p.	$r_1 = 0,02 \text{ m}$			$r_2 = 0,06 \text{ m}$			$r_3 = 0,09 \text{ m}$			G_{21} $\times 10^{10}$ [N/m ²]	G_{32} $\times 10^{10}$ [N/m ²]	G_{31} $\times 10^{10}$ [N/m ²]	$G_{\text{śr}}$ $\times 10^{10}$ [N/m ²]	E $\times 10^{10}$ [N/m ²]
	$t_1 = 10T_1$ [s]	T_1 [s]	\bar{T}_1 [s]	$t_2 = 10T_2$ [s]	T_2 [s]	\bar{T}_2 [s]	$t_3 = 10T_3$ [s]	T_3 [s]	\bar{T}_3 [s]					
1.														
2.														
3.														
4.														
5.														
6.														
7.														
8.														
9.														
10.														

VII. Opracowanie ćwiczenia

1. Obliczyć (z wartości średnich $T_{i,j}$ ($\bar{T}_{i,j}$)) moduł sztywności drutu stalowego na podstawie wzoru

$$G_{ij} = A \frac{r_j^2 - r_i^2}{\bar{T}_j^2 - \bar{T}_i^2}$$

gdzie $A = \frac{16\pi m l_1 l_2}{R^4(l_1 + l_2)}$

dla trzech możliwych kombinacji wynikających z rozstawienia krążków.

Dla wartości:

$$l_1 = (0,174 \pm 0,001) \text{ m}$$

$$l_2 = (0,190 \pm 0,001) \text{ m}$$

$$R = (0,4 \pm 0,005) \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$m = (0,190 \pm 0,00001) \text{ kg}$$

charakteryzujących dany układ, stała $A = 3,4 \cdot 10^{13} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

2. Przyjmując współczynnik Poissona $\nu = 0,27$, obliczyć moduł Younga E , korzystając z zależności

$$E = 2G_{sr}(1 + \nu)$$

VIII. Rachunek błędów

1. Błędy $|\Delta \bar{T}_1|$, $|\Delta \bar{T}_2|$, $|\Delta \bar{T}_3|$ obliczyć metodą Gaussa w oparciu o wzór

$$|\Delta \bar{T}| = \sqrt{\frac{\sum \varepsilon_i^2}{n(n-1)}}, \text{ gdzie } \varepsilon_i = |\bar{T} - T_i|, n = 10$$

2. Błąd $|\Delta G|$ obliczyć metodą różniczki zupełnej.

W obliczeniach przyjmując:

- wartość błędów $|\Delta A| = 0,2 \cdot 10^{13} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ - obliczoną z zależności

$$|\Delta A| = A \left[\left| \frac{\Delta m}{m} \right| + 4 \left| \frac{\Delta R}{R} \right| + \frac{(l_1^2 + l_2^2)}{l_1 l_2 (l_1 + l_2)} |\Delta l| \right]$$

będącej wynikiem obliczenia różniczki zupełnej (23), gdzie

$$|\Delta l_1| = |\Delta l_2| = |\Delta l| = 10^{-3} \text{ m}, |\Delta R| = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m} \text{ i } |\Delta m| = 10^{-3} \text{ kg},$$

- wartości $|\Delta r_1| = |\Delta r_2| = |\Delta r_3| = |\Delta r| = 10^{-3} \text{ m}$
- obliczone w punkcie 1 wartości $|\Delta \bar{T}_1|, |\Delta \bar{T}_2|, |\Delta \bar{T}_3|$.

Można pokazać, że zwięzły zapis wzoru na $|\Delta G|$ ma postać;

$$|\Delta G_{ij}| = \frac{r_j^2 - r_i^2}{\bar{T}_j^2 - \bar{T}_i^2} |\Delta A| + 2A \frac{r_j + r_i}{\bar{T}_j - \bar{T}_i} |\Delta r| + 2A \frac{r_j^2 - r_i^2}{(\bar{T}_j^2 - \bar{T}_i^2)^2} (\bar{T}_j |\Delta \bar{T}_j| + \bar{T}_i |\Delta \bar{T}_i|)$$

3. Obliczyć wartość $|\Delta E|$, różniczkując wzór (13) oraz przyjmując stałą Poissona ν jako wielkość tablicową nieobarczoną błędem.
4. Przeprowadzić dyskusję uzyskanych wyników.

Literatura

1. Feynman R.P., Leighton R.B., Sands M., Feynmana wykłady z fizyki, T. 2, cz. 2, PWN, Warszawa 1974.
2. Hrabowska J., Tykarski L., Laboratorium podstaw fizyki, Wydawnictwo Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1986.
3. Konarzewski Z., Podstawy technicznej mechaniki ciała stałego, WNT, Warszawa 1985.
4. Lech J., Opracowanie wyników pomiarów w laboratorium podstaw fizyki, Wydawnictwo Wydziału Inżynierii Procesowej, Materiałowej i Fizyki Stosowanej PCz, Częstochowa 2005.
5. Respondowski R., Laboratorium z fizyki, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 1999.
6. Szczeniowski S., Fizyka doświadczalna, cz. 1, Mechanika i akustyka, PWN, Warszawa 1980.
7. Szydłowski H., Pracownia fizyczna wspomagana komputerem, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2003.
8. Zawadzki A., Hofmokl H., Laboratorium fizyczne, PWN, Warszawa 1968.