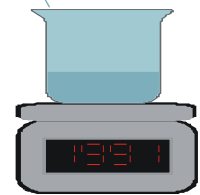


***KATEDRA FIZYKI***  
***WYDZIAŁ INŻYNIERII PRODUKCJI***  
***I TECHNOLOGII MATERIAŁÓW***  
***POLITECHNIKA CZĘSTOCHOWSKA***



***PRACOWNIA***  
***FIZYKI CZĄSTECZKOWEJ I CIEPŁA***



## ***ĆWICZENIE NR C-1***

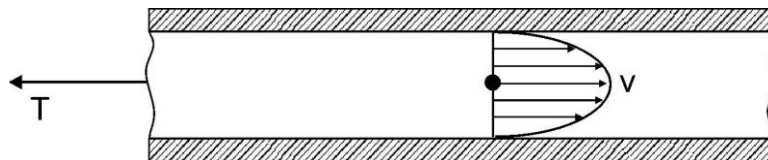
***BADANIE ZALEŻNOŚCI WSPÓLCZYNNIKA***  
***LEPKOŚCI CIECZY OD TEMPERATURY***

## I. Zagadnienia do opracowania

1. Przepływ cieczy laminarny i turbulentny, siła tarcia wewnętrznego, rozkład prędkości przepływu płynu w rurce.
2. Współczynnik lepkości i jego jednostki, zależność współczynnika lepkości od temperatury.
3. Prawo Stokesa.
4. Wiskozymetr Höpplera.
5. Rachunek błędów metodą różniczeki zupełnej.
6. Regresja liniowa.

### Wprowadzenie teoretyczne

Podczas przepływu cieczy lub gazów istotną rolę odgrywa ich lepkość, nazywana też tarcie wewnętrzne, występuje bowiem w całej objętości cieczy lub gazu. Jeżeli rozpatrzmy przepływ cieczy przez rurkę, wówczas zaobserwujemy, że najszybciej przepływa ciecz środkiem rurki, natomiast w miarę zbliżania się ku ściance prędkość stopniowo maleje aż na samej ściance staje się równa zero (rys.1).



Rys.1.

Oznacza to, że warstewki cieczy ślizgają się względem siebie. Musi zatem istnieć opór poślizgu, tzw. Opór lepkości  $T$ . Opór  $T$  jest proporcjonalny do powierzchni  $S$  ślizgających się po sobie warstewek oraz do tzw. Gradientu prędkości (zmiana prędkości na jednostkę odległości od środka rurki). Siłę  $T$  można więc opisać wzorem:

$$T = \eta S \frac{\Delta v}{\Delta l} \quad (1)$$

Współczynnik proporcjonalności  $\eta$  nazywamy współczynnikiem lepkości cieczy.

$$\eta = \frac{T}{S \frac{\Delta v}{\Delta l}} \quad \left[ \frac{Ns}{m^2} \right] \quad (2)$$

Jednostką współczynnika lepkości jest 1 poise (pauz) =  $\frac{Ns}{m^2}$ .

Jeden poise jest więc liczbowo równy sile oporu lepkości z jaką mamy do czynienia przy powierzchni

$S = 1 \text{ m}^2$  i gradientie prędkości  $\frac{\Delta v}{\Delta l} = 1 \frac{m}{s \cdot m}$ .

Opór lepkości cieczy występuje w dwóch zasadniczych typach zjawisk:

- przy ruchu cieczy względem nieruchomych ścianek;
- przy ruchu ciała względem nieruchomej cieczy.

## Ćwiczenie C-1: Badanie zależności współczynnika lepkości cieczy od temperatury

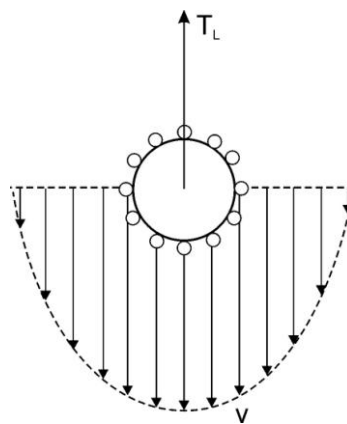
Współczynnik lepkości  $\eta$  zależy natomiast od:

- rodzaju cieczy - dla każdej cieczy posiada inną wartość, gdyż inne są siły międzycząsteczkowe;
- od temperatury cieczy – maleje ze wzrostem temperatury, bowiem w wyższej temperaturze cząsteczki poruszają się z większymi prędkościami, co osłabia siły międzycząsteczkowe.

Zależność współczynnika lepkości od temperatury jest funkcją wykładniczą:

$$\eta = Ae^{\frac{B}{T}} \quad (3)$$

Jedną z metod wyznaczania współczynnika lepkości cieczy jest metoda Stokesa. Każde ciało poruszające się w cieczy lub gazie pociąga za sobą, dzięki istnieniu sił międzycząsteczkowych, sąsiadujące z nim warstwy. Zobrazować to można na przykładzie kulki opadającej w cieczy (rys.2.)



**Rys. 2.**

Kulka pociąga za sobą przylegające doń warstwy nadając im własną prędkość  $v$ . Warstwy te pociągają za sobą dalsze, te jeszcze dalsze itd. Kulka zatem ciągnie za sobą układ warstewek ślizgających się po sobie (jak na rys. 2). Opór lepkości, na jaki natrafia poruszające się ciało, jest zależny od: wielkości i kształtu ciała, jego prędkości oraz współczynnika lepkości  $\eta$  ośrodka, w którym odbywa się ruch. Dla ciała w kształcie kuli opór ten opisuje równanie:

$$T = 6\pi\eta r v \quad (4)$$

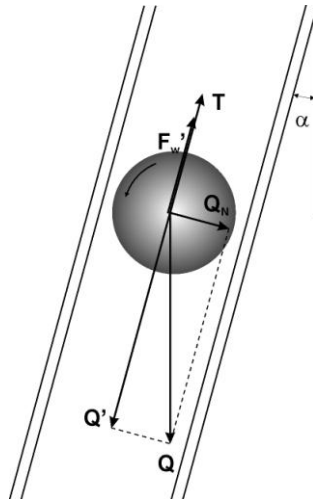
Jest to równanie Stokesa, w którym  $r$  – promień kulki,  $v$  – prędkość kulki,  $\eta$  – współczynnik lepkości.

### **Zasada pomiaru**

Na kulkę o masie  $m$  i promieniu  $r$  poruszającą się w cieczy lepkiej o gęstości  $\rho_c$  działają trzy siły:

1. Siła ciężkości:  $Q = mg$  ;
2. Siła wyporu:  $F_w = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_c g$  ;
3. Siła tarcia wewnętrznej cieczy (prawo Stokesa):  $T = 6\pi\eta r v$  ;

gdzie:  $\eta$  jest współczynnikiem lepkości cieczy, a  $v$  jest prędkością kulki.



Rys.3. Rozkład sił działających na kulkę w wiskozymetrze Höpplera.

Spadek kulki w cieczy ulega zwolnieniu, jeżeli kulka spada w rurce o średnicy nieznacznie większej od średnicy kulki. Dla uniknięcia zakłóceń ruchu rurka powinna być nieznacznie odchylona od pionu, gdyż przy jej ustawieniu pionowym ruch kulki przestaje być ruchem jednostajnym (kulka zbacza z toru pionowego ulegając wibracjom). W tym przypadku kulka jest dociskana jedną składową siły ciężkości do ścianki, a druga składowa powoduje ruch kulki po cienkiej warstwie cieczy wyścielającej ściankę. W wyniku wzajemnego poślizgu warstewek występuje opór lepkości  $T$  hamujący ruch kulki. Jest to więc przypadek identyczny jak dla ruchu opisanego prawem Stokesa ( $T = 6\pi\eta rv$ ). Różnica wystąpi jedynie we współczynniku proporcjonalności zamiast  $6\pi$  wystąpi stała  $k$  jako współczynnik proporcjonalności stały dla danego przyrządu. Zatem siłę oporu lepkiego  $T$  opisuje zależność:

$$T = k\eta rv \quad (5)$$

Rozkładamy siły ciężkości i wyporu na składowe styczne i normalne. Spadanie ciała odbywa się pod wpływem składowej siły ciężkości:

$$Q' = mg \cos \alpha = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_k g \cos \alpha \quad (6)$$

gdzie:  $\rho_k$  – gęstość materiału kulki.

Na poruszającą się kulkę działa rosnąca wraz z prędkością siła oporu lepkości  $T$  (5) oraz składowa siły wyporu cieczy (Archimedes). Początkowo składowa siły ciężkości  $Q'$  jest większa od siły oporu lepkości i składowej siły wyporu. W związku z tym kulka opada ruchem przyspieszonym. Przy pewnej prędkości  $v$  składowa siły wyporu  $F_w'$  oraz siła oporu lepkości  $T$  zrównują się ze składową siły ciężkości  $Q'$  tzn.:

$$Q' = F_w' \cos \alpha + k\eta rv \quad (7)$$

Od tego momentu kulka spada ruchem jednostajnym.

## Ćwiczenie C-1: Badanie zależności współczynnika lepkości cieczy od temperatury

Podstawiając do powyższego równania  $Q'$  i  $F_w$ :

$$F_w' = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_c g \cos \alpha \quad (8)$$

gdzie:  $r$  – promień kulki,  $\rho_c$  – gęstość cieczy,  $g$  – przyspieszenie ziemskie uzyskamy równanie:

$$\frac{4}{3} \pi r^3 \rho_k g \cos \alpha - \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_c g \cos \alpha = k \eta r v \quad (5)$$

Prędkość ruchu jednostajnego kulki  $v = h/t$ , gdzie  $h$  odległość między skrajnymi rysami rury pomiarowej.

Podstawiając:

$$K = \frac{4\pi r^3 g \cos \alpha}{3kh} \quad (6)$$

otrzymamy ostatecznie:

$$\eta = K(\rho_k - \rho_c)t \quad (7)$$

gdzie  $K$  jest stałą aparaturową. Praktycznie stałą  $K$  wyznaczamy doświadczalnie dla kulki o znanej gęstości  $\rho_k$  z użyciem cieczy wzorcowej o znanej wartości gęstości  $\rho_c$  i znanej wartości współczynnika lepkości  $\eta$ .

### **IV. Zestaw pomiarowy**

Wiskozymetr Höpplera, ultratermostat, stoper.

### **V. Przebieg ćwiczenia**

1. Badamy zależność współczynnika lepkości cieczy od temperatury w przedziale od 293 K do 323 K.
2. Wielkością pomiarową jest czas przebiegu kulki  $t$  na odcinku  $h$  (odległość między górnym i dolnym pierścieniem na rurze).
3. Termometrem kontaktowym na ultratermostacie ustawiamy żadaną temperaturę (np. 293 K) Włączamy termostat i czekamy aż temperatura w wiskozymetrze uzyska oczekiwaną wartość.
4. Odwracamy wiskozymetr i czekamy aż obie kulki znajdą się na dole. Następnie odwracamy wiskozymetr i wykonujemy pomiar czasu opadania dla dużej kulki (mała spada za szybko, ma ona tylko za zadanie przyspieszenie powrotu dużej kulki do położenia wyjściowego) pokonującej odcinek zaznaczony na wiskozymetrze.
5. Pomiary czasu opadania kulki dużej w wiskozymetrze przeprowadzamy w zakresie temperatur od 293 do 323 K co 5 K.
6. Podwyższamy temperaturę o 5K za pomocą ultratermostatu i wykonujemy kolejny pomiar.
7. Wyniki zapisujemy w tabeli.

## VI. Tabela pomiarowa

Stała kulki:  $K = 1,184 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s^2}$

Gęstość materiału kulki:  $\rho_k = 8,12 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}$

Gęstość cieczy (gliceryny):  $\rho_c = 1,26 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}$

L.p.	Temperatura T [K]	Czas opadania kulki t [s]	Współczynnik lepkości $\eta = K(\rho_k - \rho_c)t$ [Ns/m <sup>2</sup> ]	Wartość odwrotności temperatury $\frac{1}{T} \left[ \cdot 10^{-3} \frac{1}{K} \right]$	Logarytm naturalny Wartości $\eta$ $\ln \eta$	Parametry zależności $\eta = Ae^{\frac{B}{T}}$	
						A [Ns/m <sup>2</sup> ]	B [K]
1.							
2.							
3.							
4.							
5.							
6.							
7.							

## VII. Opracowanie wyników

- Obliczyć wartość współczynnika lepkości  $\eta$  (z dokładnością do 4 miejsca po przecinku) korzystając ze wzoru:  $\eta = K(\rho_k - \rho_c)t$
- Za pomocą znajdującego się w Pracowni komputera – z zainstalowanym programem obliczeniowym „Regresja” opartym na metodzie najmniejszych kwadratów – obliczyć parametry a i b prostej regresji  $y = ax + b$ , która stanowi zlinearyzowaną postać teoretycznej zależności współczynnika lepkości  $\eta$  od temperatury:

$$\eta = Ae^{\frac{B}{T}}$$

gdzie:  $e = 2,71828...$  – podstawa logarytmu naturalnego,  $x = 1/T$ ,  $y = \ln \eta$ ,  $a = B$ ,  $b = \ln A$ .

(Wartość  $\eta$  i T wprowadzamy do komputera zaczynając od wartości dla najwyższej temperatury).

- Obliczyć wartości stałych:  $A = e^b$ ,  $B = a$ .
- Obliczyć niepewności pomiarowe  $|\Delta \eta|$  dla najniższej i najwyższej temperatury pomiarów. Zaokrąglić wartości  $\eta$  i  $|\Delta \eta|$  zgodnie z obowiązującymi normami.
- Narysować (na papierze milimetrowym formatu A4) wykres  $\eta$  w funkcji temperatury:  $\eta = f(T)$

## Ćwiczenie C-1: Badanie zależności współczynnika lepkości cieczy od temperatury

- Obliczyć wartości  $\ln \eta$  i odwrotności temperatury, tj.  $1/T$  i wpisać do tabeli. Dla wygody zapisu, jako jednostkę  $1/T$  przyjąć:  $10^{-3}$  [1/K].
- Wykreślić (na papierze milimetrowym formatu A4) uśrednioną prostą  $\ln \eta = a \cdot \left(\frac{1}{T}\right) + b$  z wykorzystaniem wartości  $a$  i  $b$  obliczonych na komputerze. Na uzyskaną prostą nanieść punkty doświadczalne obliczone w punkcie 6.

### **VIII. Rachunek błędów**

- Oszacować niepewność pomiarową  $|\Delta t|$  dla pomiarów w najniższej i najwyższej temperaturze:

$$|\Delta t| = |\Delta t|_1 + |\Delta t|_2$$

gdzie  $|\Delta t|_1 = 0,2s$  - dokładność odczytu na stoperze

$$|\Delta t|_2 = |\Delta t|_2' + |\Delta t|_2''$$

$|\Delta t|_2'$  - niepewność zsynchronizowania momentu uruchomienia stopera z momentem przejścia kulki przez górny pierścień wysokości spadowej  $h$ ,

$|\Delta t|_2''$  - niepewność zsynchronizowania momentu zatrzymania stopera z momentem przejścia kulki przez dolny pierścień wysokości spadowej  $h$ ,

$$|\Delta t|_2' = |\Delta t|_2'' = |\Delta t|_d; \text{ stąd } |\Delta t|_2 = 2|\Delta t|_d \quad ;$$

np. dla temperatury pokojowej  $|\Delta t|_d \approx 0,5s$ ,  $|\Delta t|_2 = 1s$ .

- Obliczyć błąd względny dla najniższej i najwyższej temperatury.

### **IX. Literatura**

- B. Jaworski, A. Dietłaf, L. Miłkowska, G. Siergiejew – Kurs fizyki, t.1 Mechanika. Podstawy fizyki cząsteczkowej i termodynamiki, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1963r.
- J. Massalski, M. Massalska – Fizyka dla inżynierów, cz.I, Wydawnictwa Naukowo – Techniczne WNT, Warszawa 2005r.
- Sz. Szczeniowski – Fizyka doświadczalna, cz.II, Ciepło i fizyka cząsteczkowa, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1976r.
- I. W. Sawieljew – Wykłady z fizyki, t.1 Mechanika. Fizyka cząsteczkowa, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1994r.
- T. Dryński – Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1976r.
- H. Szydłowski – Pracownia fizyczna wspomagana komputerem, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2003r.
- Pod red. T. Rewaja - Ćwiczenia laboratoryjne w politechnice, Wydawnictwo Naukowe PWN Warszawa 1985r.
- R. Respondowski – Laboratorium z fizyki, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 1999r.
- J. Lech - Opracowanie wyników pomiarów w laboratorium podstaw fizyki, Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, Wydział Inżynierii Procesowej, Materiałowej i Fizyki Stosowanej, Częstochowa 2005r.

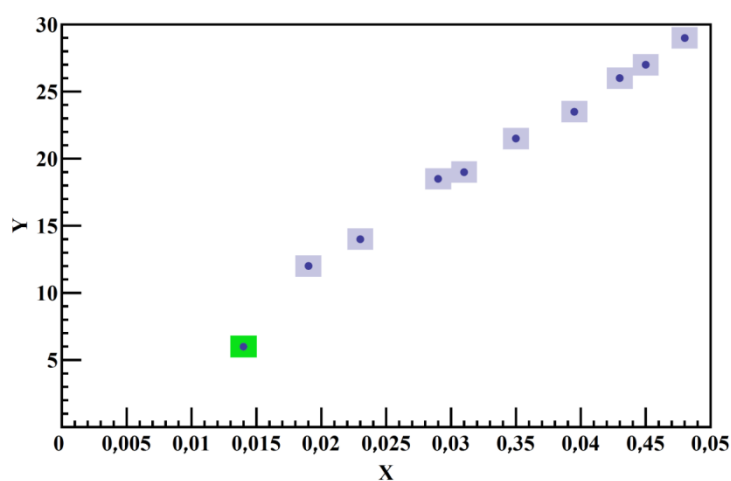
## X. Analiza graficzna

### A. Dopasowanie prostej do wyników pomiarów.

Jeżeli badana zależność jest liniowa lub otrzymany wykres sugeruje taką zależność, to jej przebieg powinien mieć zapis:  $y = a x + b$ .

W jaki sposób uzyskać wartości parametrów  $a$  i  $b$  prostej jak najlepiej dopasowanej do zbioru  $n$  punktów doświadczalnych  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  ?

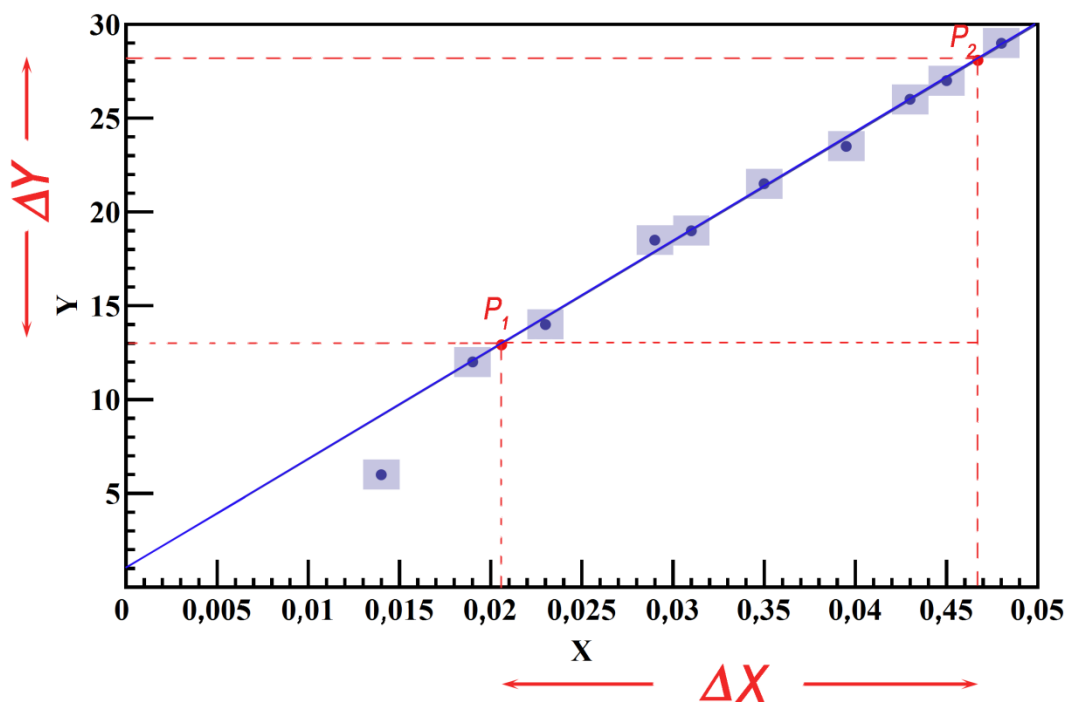
1. Na wykresie nanosimy wszystkie punkty pomiarowe oraz ich niepewności (Rys.4). Jeżeli któryś z punktów pomiarowych znacznie odbiega od przebiegu linii, wzdłuż której układają się pozostałe punkty, to w dalszej analizie należy go odrzucić jako błąd grubych. Na rys.4 jest to prostokąt oznaczony kolorem zielonym.



Rys.4

2. Jeżeli punkty układają się wzdłuż linii prostej, to linię tak prowadzimy, aby przechodziła przynajmniej przez 70% prostokątów i suma odległości współrzędnych punktów pomiarowych od tej linii była po obu stronach mniej więcej taka sama (rys.5).  
Określamy **szeregi** przedział wartości argumentu  $\Delta X$  i odpowiadający temu przyrost wartości zmiennej zależnej (wartości funkcji)  $\Delta Y$  - wybieramy dwa punkty  $P_1$  i  $P_2$  (zaznaczone na rys.5 kolorem czerwonym) i odczytujemy odpowiednie wartości ich współrzędnych  $(x_1, y_1)$  oraz  $(x_2, y_2)$ .  
Obliczamy różnice  $\Delta X = x_2 - x_1$  i  $\Delta Y = y_2 - y_1$ .





Rys.5

3. Współczynnik nachylenia  $a$  jest stosunkiem przyprostokątnych  $\Delta Y$  i  $\Delta X$  trójkąta, którego przeciwprostokątna jest częścią poprowadzonej graficznie prostej (rys. 5).

Współczynnik kierunkowy tak narysowanej prostej jest równy:

$$a = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \quad (1)$$

Współczynnik  $b$  jest miejscem przecięcia prostej z osią Y. W przypadkach, gdy z wykresu nie można bezpośrednio odczytać wartości Y dla  $X=0$  (czyli parametru  $b$ ), wykorzystujemy równanie prostej  $y = a x + b$ , do którego podstawiamy np. współrzędne punktu  $P_1(x_1, y_1)$  i obliczony wcześniej parametr  $a$ .

### UWAGA:

Nie należy utożsamiać współczynnika nachylenia z tangensem kąta nachylenia prostej do osi X (czyli nie mierzymy kąta nachylenia prostej kątomierzem!). W wykresach wielkości fizycznych kąt nachylenia prostej może być różny dla tych samych danych pomiarowych w zależności od tego, jakie podziałki zastosujemy na osiach wykresu. Jednoznacznie określoną wielkością pozostaje współczynnik nachylenia  $a$  określony wzorem (1).

W przeciwieństwie do bezwymiarowego tangensa, nachylenie  $a$  posiada wymiar, będący stosunkiem wymiarów wielkości Y i X.

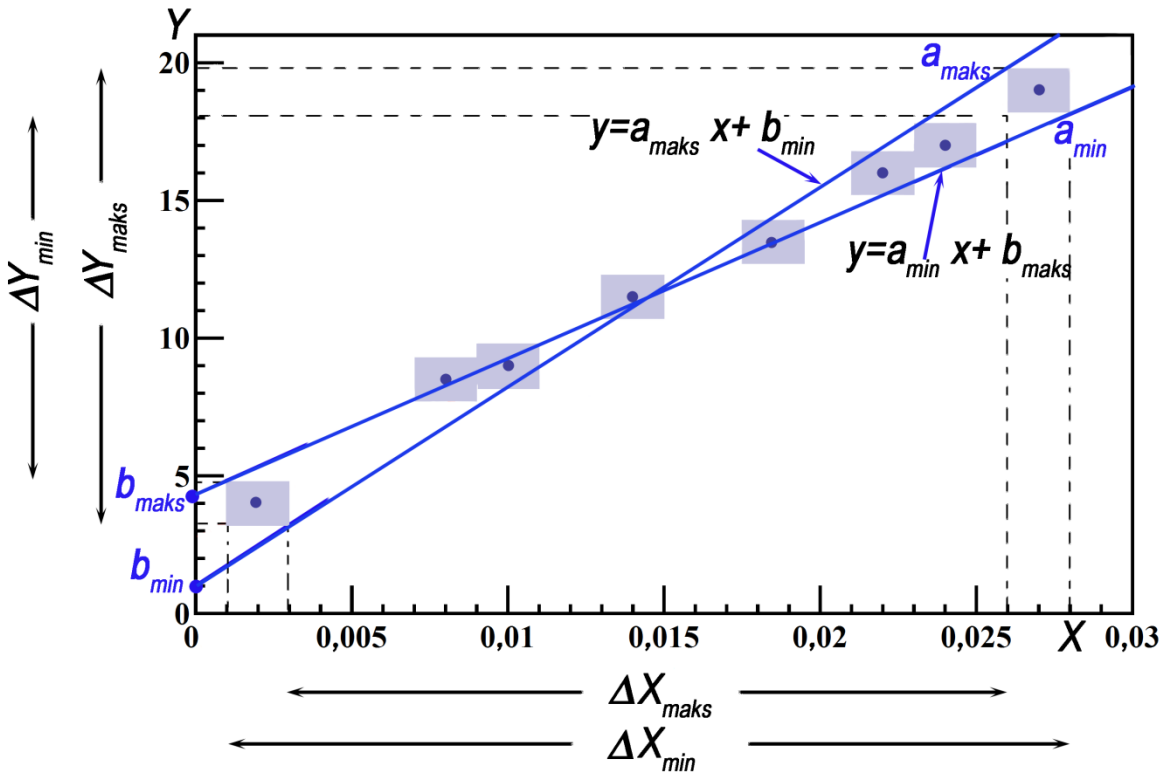
## B. Graficzne szacowanie wartości niepewności współczynników $a$ i $b$

Wadą metody graficznej wydawać się może subiektywność (każdy poprowadzi prostą trochę inaczej) jak i brak informacji o niepewności  $\Delta a$  i  $\Delta b$  parametrów prostej.

Ćwiczenie C-1: Badanie zależności współczynnika lepkości cieczy od temperatury

Poniżej przedstawiona jest metoda wyznaczania wartości parametrów  $a$  i  $b$  oraz ich niepewności dla prostej najlepiej dopasowującej dane pomiarowe.

Wybieramy dwa końcowe punkty pomiarowe i prowadzimy dwie proste o największym ( $a_{maks}$ ) i najmniejszym ( $a_{min}$ ) kącie nachylenia. Proste te powinny przechodzić przez przeciwległe wierzchołki skrajnych prostokątów niepewności, tak jak pokazano poniżej na rys. 6. Na osi Y proste wyznaczają dwa punkty przecięcia, wyznaczające  $b_{min}$  i  $b_{maks}$ .



Rys. 6

Wówczas,

$$a_{min} = \frac{\Delta Y_{min}}{\Delta X_{min}} \quad \text{i} \quad a_{maks} = \frac{\Delta Y_{maks}}{\Delta X_{maks}}$$

$$|\Delta a| = \frac{1}{2} |a_{maks} - a_{min}|$$

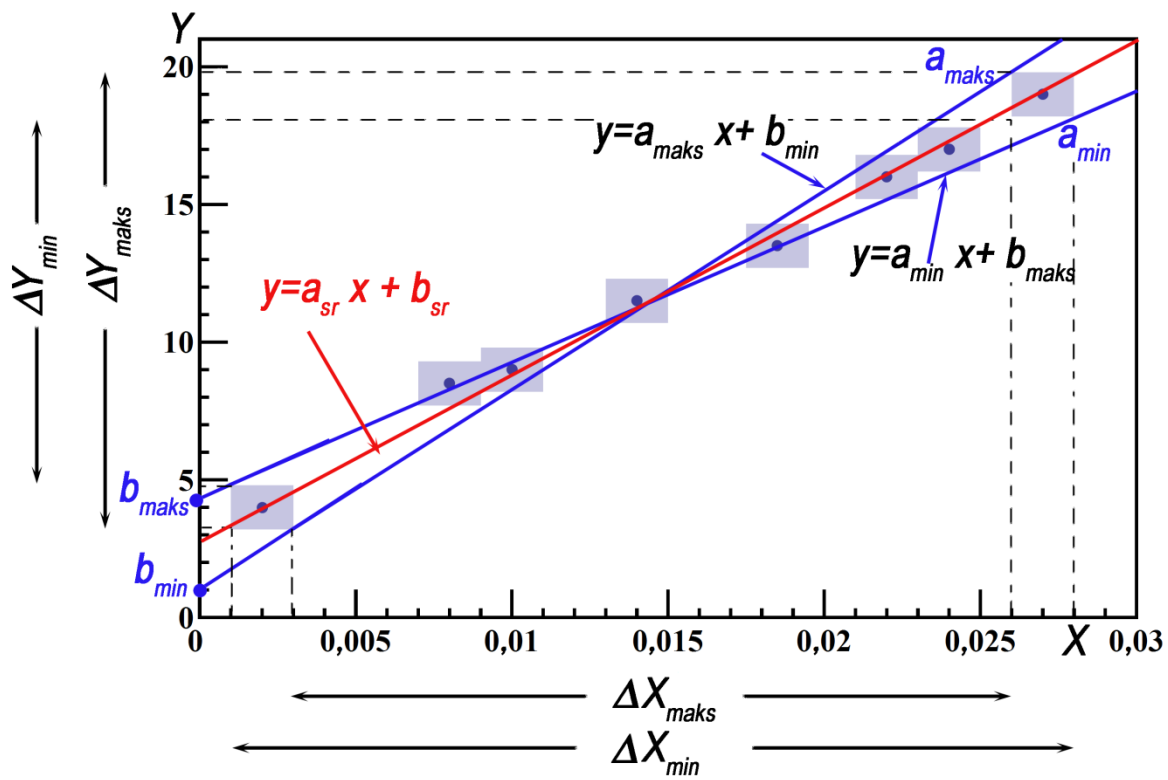
$$a_{sr} = \frac{1}{2} (a_{maks} + a_{min})$$

oraz  $|\Delta b| = \frac{1}{2} |b_{maks} - b_{min}|$

$$b_{sr} = \frac{1}{2} (b_{maks} + b_{min})$$

Ostatecznie, na rys.7 poprowadzono prostą najlepszego dopasowania

$y = a_{sr} x + b_{sr}$ , otrzymaną metodą graficzną (zaznaczona kolorem czerwonym).



Rys.7